

普通高中

数学课程标准

(实验)

中华人民共和国教育部制订

人民教育出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

普通高中数学课程标准(实验)/中华人民共和国教育部制
订. —北京:人民教育出版社, 2003.4 (2015.1 重印)
ISBN 978-7-107-16558-0

I. ①普… II. ①中… III. ①中学数学课—课程标准—高中
IV. ①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 028740 号

人民教育出版社出版发行

网址: <http://www.pep.com.cn>

大厂益利印刷有限公司印装 全国新华书店经销

2003 年 4 月第 1 版 2015 年 1 月第 17 次印刷

开本: 787 毫米×1 092 毫米 1/16 印张: 8 字数: 99 千字

定价: 7.20 元

如发现印、装质量问题,影响阅读,请与本社出版二科联系调换。
(联系地址:北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编:100081)

目 录

第一部分 前言	(1)
一、课程性质	(1)
二、课程的基本理念	(2)
三、课程设计思路	(5)
(一) 高中数学课程框架	(5)
(二) 对学生选课的建议	(9)
(三) 本标准中使用的主要行为动词	(10)
第二部分 课程目标	(11)
第三部分 内容标准	(12)
一、必修课程	(12)
数学 1	(13)
数学 2	(19)
数学 3	(24)
数学 4	(30)
数学 5	(34)
二、选修课程	(39)
系列 1, 系列 2 说明	(39)
系列 1	(40)
选修 1-1	(40)

选修 1-2	(46)
系列 2	(52)
选修 2-1	(52)
选修 2-2	(56)
选修 2-3	(62)
系列 3, 系列 4 说明	(66)
系列 3	(67)
数学史选讲	(67)
信息安全与密码	(70)
球面上的几何	(71)
对称与群	(73)
欧拉公式与闭曲面分类	(75)
三等分角与数域扩充	(77)
系列 4	(79)
几何证明选讲	(79)
矩阵与变换	(81)
数列与差分	(83)
坐标系与参数方程	(85)
不等式选讲	(88)
初等数论初步	(90)
优选法与试验设计初步	(92)
统筹法与图论初步	(93)
风险与决策	(95)
开关电路与布尔代数	(96)

三、数学探究、数学建模、数学文化	(98)
数学探究	(98)
数学建模	(101)
数学文化	(104)
第四部分 实施建议	(107)
一、教学建议	(107)
二、评价建议	(112)
三、教材编写建议	(116)
附录 标准中引用的外国数学家人名中外文对照表	(121)

第一部分 前言

数学是研究空间形式和数量关系的科学，是刻画自然规律和社会规律的科学语言和有效工具。数学科学是自然科学、技术科学等科学的基础，并在经济科学、社会科学、人文科学的发展中发挥越来越大的作用。数学的应用越来越广泛，正在不断地渗透到社会生活的方方面面，它与计算机技术的结合在许多方面直接为社会创造价值，推动着社会生产力的发展。数学在形成人类理性思维和促进个人智力发展的过程中发挥着独特的、不可替代的作用。数学是人类文化的重要组成部分，数学素质是公民所必须具备的一种基本素质。

数学教育作为教育的组成部分，在发展和完善人的教育活动中、在形成人们认识世界的态度和思想方法方面、在推动社会进步和发展的进程中起着重要的作用。在现代社会中，数学教育又是终身教育的重要方面，它是公民进一步深造的基础，是终身发展的需要。数学教育在学校教育中占有特殊的地位，它使学生掌握数学的基础知识、基本技能、基本思想，使学生表达清晰、思考有条理，使学生具有实事求是的态度、锲而不舍的精神，使学生学会用数学的思考方式解决问题、认识世界。

一、课程性质

高中数学课程是义务教育后普通高级中学的一门主要课程，它包含了数学中最基本的内容，是培养公民素质的基础课程。

高中数学课程对于认识数学与自然界、数学与人类社会的联系，认识数学的科学价值、文化价值，提高提出问题、分析和解决问题的能力，形成理性思维，发展智力和创新意识具有基础性的作用。

高中数学课程有助于学生认识数学的应用价值，增强应用意识，

形成解决简单实际问题的能力。

高中数学课程是学习高中物理、化学、技术等课程和进一步学习的基础。同时，它为学生的终身发展，形成科学的世界观、价值观奠定基础，对提高全民族素质具有重要意义。

二、课程的基本理念

1. 构建共同基础，提供发展平台

高中教育属于基础教育。高中数学课程应具有基础性，它包括两方面的含义：第一，在义务教育阶段之后，为学生适应现代生活和未来发展提供更高水平的数学基础，使他们获得更高的数学素养；第二，为学生进一步学习提供必要的数学准备。高中数学课程由必修系列课程和选修系列课程组成，必修系列课程是为了满足所有学生的共同数学需求；选修系列课程是为了满足学生的不同数学需求，它仍然是学生发展所需要的基础性数学课程。

2. 提供多样课程，适应个性选择

高中数学课程应具有多样性与选择性，使不同的学生在数学上得到不同的发展。

高中数学课程应为学生提供选择和发展的空间，为学生提供多层次、多种类的选择，以促进学生的个性发展和对未来人生规划的思考。学生可以在教师的指导下进行自主选择，必要时还可以进行适当地转换、调整。同时，高中数学课程也应给学校和教师留有一定的选择空间，他们可以根据学生的基本需求和自身的条件，制定课程发展计划，不断地丰富和完善供学生选择的课程。

3. 倡导积极主动、勇于探索的学习方式

学生的数学学习活动不应只限于接受、记忆、模仿和练习，高中数学课程还应倡导自主探索、动手实践、合作交流、阅读自学等学习数学的方式。这些方式有助于发挥学生学习的主动性，使学生的学习过程成为在教师引导下的“再创造”过程。同时，高中数学

课程设立“数学探究”“数学建模”等学习活动，为学生形成积极主动的、多样的学习方式进一步创造有利的条件；以激发学生的数学学习兴趣，鼓励学生在 学习过程中，养成独立思考、积极探索的习惯。高中数学课程应力求通过各种不同形式的自主学习、探究活动，让学生体验数学发现和创造的历程，发展他们的创新意识。

4. 注重提高学生的数学思维能力

高中数学课程应注重提高学生的数学思维能力，这是数学教育的基本目标之一。人们在学习数学和运用数学解决问题时，不断地经历直观感知、观察发现、归纳类比、空间想像、抽象概括、符号表示、运算求解、数据处理、演绎证明、反思与建构等思维过程。这些过程是数学思维能力的具体体现，有助于学生对客观事物中蕴涵的数学模式进行思考和做出判断。数学思维能力在形成理性思维中发挥着独特的作用。

5. 发展学生的数学应用意识

20 世纪下半叶以来，数学应用的巨大发展是数学发展的显著特征之一。当今知识经济时代，数学正在从幕后走向台前，数学和计算机技术的结合使得数学能够在许多方面直接为社会创造价值，同时，也为数学发展开拓了广阔的前景。我国的数学教育在很长一段时间内对于数学与实际、数学与其他学科的联系未能给予充分的重视，因此，高中数学在数学应用和联系实际方面需要大力加强。近几年来，我国大学、中学数学建模的实践表明，开展数学应用的教学活动符合社会需要，有利于激发学生学习数学的兴趣，有利于增强学生的应用意识，有利于扩展学生的视野。

高中数学课程应提供基本内容的实际背景，反映数学的应用价值，开展“数学建模”的学习活动，设立体现数学某些重要应用的专题课程。高中数学课程应力求使学生体验数学在解决实际问题中的作用、数学与日常生活及其他学科的联系，促进学生逐步形成和发展数学应用意识，提高实践能力。

6. 与时俱进地认识“双基”

我国的数学教学具有重视基础知识教学、基本技能训练和能力培养的传统，新世纪的高中数学课程应发扬这种传统。与此同时，随着时代的发展，特别是数学的广泛应用、计算机技术和现代信息技术的发展，数学课程设计和实施应重新审视基础知识、基本技能和能力的内涵，形成符合时代要求的新的“双基”。例如，为了适应信息时代发展的需要，高中数学课程应增加算法的内容，把最基础的数据处理、统计知识等作为新的数学基础知识和基本技能；同时，应删减繁琐的计算、人为技巧化的难题和过分强调细枝末节的内容，克服“双基异化”的倾向。

7. 强调本质，注意适度形式化

形式化是数学的基本特征之一。在数学教学中，学习形式化的表达是一项基本要求，但是不能只限于形式化的表达，要强调对数学本质的认识，否则会将生动活泼的数学思维活动淹没在形式化的海洋里。数学的现代发展也表明，全盘形式化是不可能的。因此，高中数学课程应该返璞归真，努力揭示数学概念、法则、结论的发展过程和本质。数学课程要讲逻辑推理，更要讲道理，通过典型例子的分析和学生自主探索活动，使学生理解数学概念、结论逐步形成的过程，体会蕴涵在其中的思想方法，追寻数学发展的历史足迹，把数学的学术形态转化为学生易于接受的教育形态。

8. 体现数学的文化价值

数学是人类文化的重要组成部分。数学课程应适当反映数学的历史、应用和发展趋势，数学对推动社会发展的作用，数学的社会需求，社会发展对数学发展的推动作用，数学科学的思想体系，数学的美学价值，数学家的创新精神。数学课程应帮助学生了解数学在人类文明发展中的作用，逐步形成正确的数学观。为此，高中数学课程提倡体现数学的文化价值，并在适当的内容中提出对“数学文化”的学习要求，设立“数学史选讲”等专题。

9. 注重信息技术与数学课程的整合

现代信息技术的广泛应用正在对数学课程内容、数学教学、数学学习等方面产生深刻的影响。高中数学课程应提倡实现信息技术与课程内容的有机整合（如把算法融入到数学课程的各个相关部分），整合的基本原则是有利于学生认识数学的本质。高中数学课程应提倡利用信息技术来呈现以往教学中难以呈现的课程内容，在保证笔算训练的前提下，尽可能使用科学型计算器、各种数学教育技术平台，加强数学教学与信息技术的结合，鼓励学生运用计算机、计算器等进行探索和发现。

10. 建立合理、科学的评价体系

现代社会对人的发展的要求引起评价体系的深刻变化，高中数学课程应建立合理、科学的评价体系，包括评价理念、评价内容、评价形式和评价体制等方面。评价既要关注学生数学学习的结果，也要关注他们数学学习的过程；既要关注学生数学学习的水平，也要关注他们在数学活动中所表现出来的情感态度的变化。在数学教育中，评价应建立多元化的目标，关注学生个性与潜能的发展。例如，过程性评价应关注对学生理解数学概念、数学思想等过程的评价，关注对学生数学地提出、分析、解决问题等过程的评价，以及在过程中表现出来的与人合作的态度、表达与交流的意识和探索的精神。对于数学探究、数学建模等学习活动，要建立相应的过程评价内容和方法。

三、课程设计思路

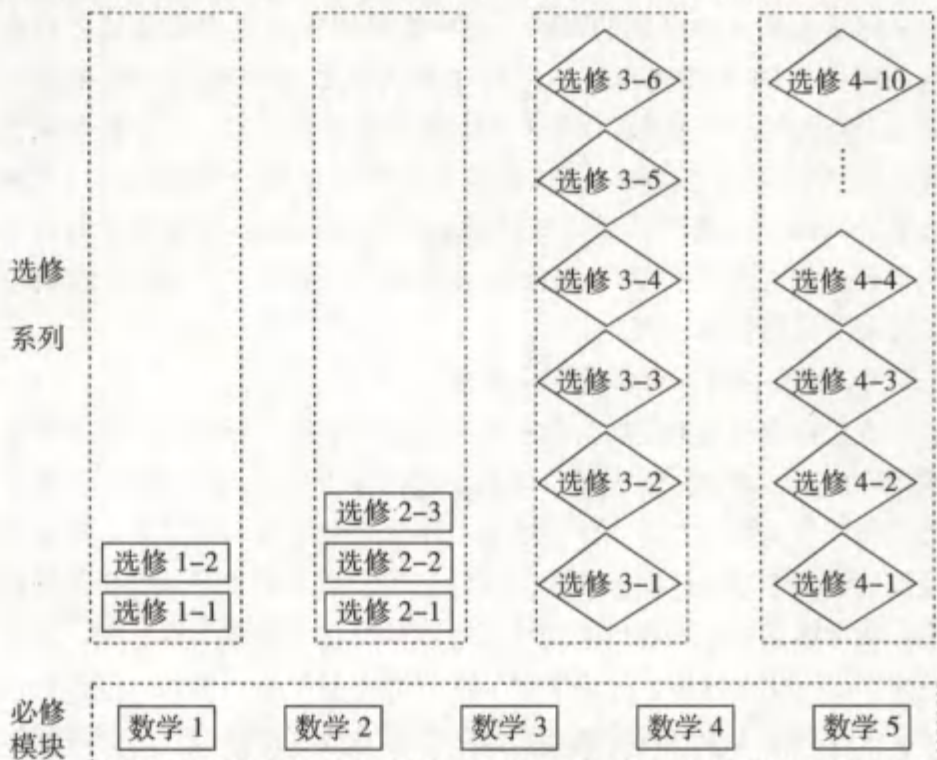
高中数学课程力求将教育改革的 basic 理念与课程的框架设计、内容确定以及课程实施有机地结合起来。



（一）高中数学课程框架

1. 课程框架

高中数学课程分必修和选修。必修课程由 5 个模块组成；选修课程有 4 个系列，其中系列 1、系列 2 由若干个模块组成，系列 3、

系列4由若干专题组成；每个模块2学分（36学时），每个专题1学分（18学时），每2个专题可组成1个模块。课程结构如图所示。



注：上图中  代表模块（36学时）， 代表专题（18学时）。

2. 必修课程

必修课程是每个学生都必须学习的数学内容，包括5个模块。

数学1：集合、函数概念与基本初等函数 I（指数函数、对数函数、幂函数）。

数学2：立体几何初步、平面解析几何初步。

数学3：算法初步、统计、概率。

数学4：基本初等函数 II（三角函数）、平面上的向量、三角恒等变换。

数学5：解三角形、数列、不等式。

3. 选修课程

对于选修课程，学生可以根据自己的兴趣和对未来发展的愿望进行选择。选修课程由系列1，系列2，系列3，系列4等组成。

◆ 系列1：由2个模块组成。

选修1-1：常用逻辑用语、圆锥曲线与方程、导数及其应用。

选修1-2：统计案例、推理与证明、数系的扩充与复数的引入、框图。

◆ 系列2：由3个模块组成。

选修2-1：常用逻辑用语、圆锥曲线与方程、空间中的向量与立体几何。

选修2-2：导数及其应用、推理与证明、数系的扩充与复数的引入。

选修2-3：计数原理、统计案例、概率。

◆ 系列3：由6个专题组成。

选修3-1：数学史选讲。

选修3-2：信息安全与密码。

选修3-3：球面上的几何。

选修3-4：对称与群。

选修3-5：欧拉公式与闭曲面分类。

选修3-6：三等分角与数域扩充。

◆ 系列4：由10个专题组成。

选修4-1：几何证明选讲。

选修4-2：矩阵与变换。

选修4-3：数列与差分。

选修4-4：坐标系与参数方程。

选修4-5：不等式选讲。

选修4-6：初等数论初步。

选修4-7：优选法与试验设计初步。

选修4-8：统筹法与图论初步。

选修 4-9：风险与决策。

选修 4-10：开关电路与布尔代数。

4. 关于课程设置的说明

◆ 课程设置的原理与意图

必修课程内容确定的原理是：满足未来公民的基本数学需求，为学生进一步的学习提供必要的数学准备。

选修课程内容确定的原理是：满足学生的兴趣和对未来发展的需求，为学生进一步学习、获得较高数学素养奠定基础。其中，

系列 1 是为那些希望在人文、社会科学等方面发展的学生而设置的，系列 2 则是为那些希望在理工、经济等方面发展的学生而设置的。系列 1，系列 2 内容是选修系列课程中的基础性内容。

系列 3 和系列 4 是为对数学有兴趣和希望进一步提高数学素养的学生而设置的，所涉及的内容反映了某些重要的数学思想，有助于学生进一步打好数学基础，提高应用意识，有利于学生终身的发展，有利于扩展学生的数学视野，有利于提高学生对数学的科学价值、应用价值、文化价值的认识。其中的专题将随着课程的发展逐步予以扩充，学生可根据自己的兴趣、志向进行选择。根据系列 3 内容的特点，系列 3 不作为高校选拔考试的内容，对这部分内容学习的评价适宜采用定量与定性相结合的方式，由学校进行评价，评价结果可作为高校录取的参考。

◆ 设置了数学探究、数学建模、数学文化内容

高中数学课程要求把数学探究、数学建模的思想以不同的形式渗透在各模块和专题内容之中，并在高中阶段至少安排较为完整的一次数学探究、一次数学建模活动。高中数学课程要求把数学文化内容与各模块的内容有机结合。具体的要求可以参考数学探究、数学建模、数学文化的要求（参见第 98 页）。

◆ 模块的逻辑顺序

必修课程是选修课程中系列 1，系列 2 课程的基础。选修课程中

系列 3、系列 4 基本上不依赖其他系列的课程，可以与其他系列课程同时开设，这些专题的开设可以不考虑先后顺序。必修课程中，数学 1 是数学 2，数学 3，数学 4 和数学 5 的基础。

◆ 系列 3、系列 4 课程的开设

学校应在保证必修课程，选修系列 1、系列 2 开设的基础上，根据自身的情况，开设系列 3 和系列 4 中的某些专题，以满足学生的基本选择需求。学校应根据自身的情况逐步丰富和完善，并积极开发、利用校外课程资源（包括远程教育资源）。对于课程的开设，教师也应该根据自身条件制定个人发展计划。

（二）对学生选课的建议

学生的兴趣、志向与自身条件不同，不同高校、不同专业对学生数学方面的要求也不同，甚至同一专业对学生数学方面的要求也不一定相同。随着时代的发展，无论是在自然科学、技术科学等方面，还是在人文科学、社会科学等方面，都需要一些具有较高数学素养的学生，这对于社会、科学技术的发展都具有重要的作用。据此，学生可以选择不同的课程组合，选择以后还可以根据自身的情况和条件进行适当的调整。以下提供课程组合的几种基本建议。

1. 学生完成 10 个学分的必修课程，在数学上达到高中毕业要求。

2. 在完成 10 个必修学分的基础上，希望在人文、社会科学等方面发展的学生，可以有两种选择。一种是，在系列 1 中学习选修 1-1 和选修 1-2，获得 4 学分；在系列 3 中任选 2 个专题，获得 2 学分，共获得 16 学分。另一种是，如果学生对数学有兴趣，并且希望获得较高数学素养，除了按上面的要求获得 16 学分，同时在系列 4 中获得 4 学分，总共获得 20 学分。

3. 希望在理工（包括部分经济类）等方面发展的学生，在完成 10 个必修学分的基础上，可以有两种选择。一种是，在系列 2 中学习选修 2-1，选修 2-2 和选修 2-3，获得 6 学分；在系列 3 中任选 2 个

专题，获得 2 学分；在系列 4 中任选 2 个专题，获得 2 学分，共获得 20 学分。另一种是，如果学生对数学有兴趣，希望获得较高数学素养，除了按上面的要求获得 20 学分，同时在系列 4 中选修 4 个专题，获得 4 学分，总共获得 24 学分。

课程的组合具有一定的灵活性，不同的组合可以相互转换。学生作出选择之后，可以根据自己的意愿和条件向学校申请调整，经过测试获得相应的学分即可转换。

（三）本标准中使用的主要行为动词

本标准的目标要求包括三个方面：知识与技能，过程与方法，情感、态度与价值观，所涉及的行为动词水平大致分类如下。

目标领域	水平	行为动词
知识与技能	知道/了解/模仿	了解，体会，知道，识别，感知，认识，初步了解，初步体会，初步学会，初步理解，求
	理解/独立操作	描述，说明，表达，表述，表示，刻画，解释，推测，想像，理解，归纳，总结，抽象，提取，比较，对比，判定，判断，会求，能，运用，初步应用，初步讨论
	掌握/应用/迁移	掌握，导出，分析，推导，证明，研究，讨论，选择，决策，解决问题
过程与方法	经历/模仿	经历，观察，感知，体验，操作，查阅，借助，模仿，收集，回顾，复习，参与，尝试
	发现/探索	设计，梳理，整理，分析，发现，交流，研究，探索，探究，探求，解决，寻求
情感、态度与价值观	反应/认同	感受，认识，了解，初步体会，体会
	领悟/内化	获得，提高，增强，形成，养成，树立，发挥，发展

第二部分 课程目标

高中数学课程的总目标是：使学生在九年义务教育数学课程的基础上，进一步提高作为未来公民所必要的数学素养，以满足个人发展与社会进步的需要。具体目标如下。

1. 获得必要的数学基础知识和基本技能，理解基本的数学概念、数学结论的本质，了解概念、结论等产生的背景、应用，体会其中所蕴涵的数学思想和方法，以及它们在后续学习中的作用。通过不同形式的自主学习、探究活动，体验数学发现和创造的历程。

2. 提高空间想像、抽象概括、推理论证、运算求解、数据处理等基本能力。

3. 提高数学地提出、分析和解决问题（包括简单的实际问题）的能力，数学表达和交流的能力，发展独立获取数学知识的能力。

4. 发展数学应用意识和创新意识，力求对现实世界中蕴涵的一些数学模式进行思考和作出判断。

5. 提高学习数学的兴趣，树立学好数学的信心，形成锲而不舍的钻研精神和科学态度。

6. 具有一定的数学视野，逐步认识数学的科学价值、应用价值和文化价值，形成批判性的思维习惯，崇尚数学的理性精神，体会数学的美学意义，从而进一步树立辩证唯物主义和历史唯物主义世界观。

第三部分 内容标准

一、必修课程

必修课程是整个高中数学课程的基础，包括5个模块，共10学分，是所有学生都要学习的内容。其内容的确定遵循两个原则：一是满足未来公民的基本数学需求；二是为学生进一步的学习提供必要的数学准备。

5个模块的内容为：

数学1：集合、函数概念与基本初等函数I（指数函数、对数函数、幂函数）。

数学2：立体几何初步、平面解析几何初步。

数学3：算法初步、统计、概率。

数学4：基本初等函数II（三角函数）、平面上的向量、三角恒等变换。

数学5：解三角形、数列、不等式。

上述内容覆盖了高中阶段传统的数学基础知识和基本技能的主要部分，其中包括集合、函数、数列、不等式、解三角形、立体几何初步、平面解析几何初步等。不同的是在保证打好基础的同时，进一步强调了这些知识的发生、发展过程和实际应用，而不在技巧与难度上做过高的要求。

此外，基础内容还增加了向量、算法、概率、统计等内容。

向量是近代数学最重要和最基本的概念之一，是沟通几何、代数、三角等内容的桥梁，它具有丰富的实际背景和广泛的应用。

现代社会是一个信息化的社会，人们常常需要根据所获取的数据提取信息，做出合理的决策，在必修课程中将学习统计与概率的基本思想和基础知识，它们是公民的必备常识。

算法是一个全新的课题，已经成为计算科学的重要基础，它在科学技术和社会发展中起着越来越重要的作用。算法的思想和初步知识，也正在成为普通公民的常识。在必修课程中将学习算法的基本思想和初步知识，算法思想将贯穿高中数学课程的相关部分。

必修课程的呈现力求展现由具体到抽象的过程，努力体现数学知识中蕴涵的基本思想方法和内在联系，体现数学知识的发生、发展过程和实际应用。教师和教材编写者应根据具体内容在适当的地方（如统计、简单线性规划等）安排一些实习作业。

数 学 1

在本模块中，学生将学习集合、函数概念与基本初等函数 I（指数函数、对数函数、幂函数）。

集合论是德国数学家康托在 19 世纪末创立的，集合语言是现代数学的基本语言。使用集合语言，可以简洁、准确地表达数学的一些内容。高中数学课程只将集合作为一种语言来学习，学生将学会使用最基本的集合语言表示有关的数学对象，发展运用数学语言进行交流的能力。

函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型。高中阶段不仅把函数看成变量之间的依赖关系，同时还用集合与对应的语言刻画函数，函数的思想方法将贯穿高中数学课程的始终。学生将学习指数函数、对数函数等具体的基本初等函数，结合实际问题，感受运用函数概念建立模型的过程和方法，体会函数在数学和其他学科中的重要性，初步运用函数思想理解和处理现实生活和社会中的简单问题。学生还将学习利用函数的性质求方程的近似解，体会函数与方程的有机联系。

内容与要求

1. 集合（约 4 课时）

（1）集合的含义与表示

① 通过实例，了解集合的含义，体会元素与集合的“属于”关系。

② 能选择自然语言、图形语言、集合语言（列举法或描述法）描述不同的具体问题，感受集合语言的意义和作用。

(2) 集合间的基本关系

① 理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集。

② 在具体情境中，了解全集与空集的含义。

(3) 集合的基本运算

① 理解两个集合的并集与交集的含义，会求两个简单集合的并集与交集。

② 理解在给定集合中一个子集的补集的含义，会求给定子集的补集。

③ 能使用 Venn 图表达集合的关系及运算，体会直观图示对理解抽象概念的作用。

2. 函数概念与基本初等函数 I (约 32 课时)

(1) 函数

① 通过丰富实例，进一步体会函数是描述变量之间的依赖关系的重要数学模型，在此基础上学习用集合与对应的语言来刻画函数，体会对应关系在刻画函数概念中的作用；了解构成函数的要素，会求一些简单函数的定义域和值域；了解映射的概念。

② 在实际情境中，会根据不同的需要选择恰当的方法（如图象法、列表法、解析法）表示函数。

③ 通过具体实例，了解简单的分段函数，并能简单应用。

④ 通过已学过的函数特别是二次函数，理解函数的单调性、最大（小）值及其几何意义；结合具体函数，了解奇偶性的含义。

⑤ 学会运用函数图象理解和研究函数的性质（参见例 1）。

(2) 指数函数

① 通过具体实例（如细胞的分裂，考古中所用的 ^{14}C 的衰减，

药物在人体内残留量的变化等),了解指数函数模型的实际背景。

② 理解有理指数幂的含义,通过具体实例了解实数指数幂的意义,掌握幂的运算。

③ 理解指数函数的概念和意义,能借助计算器或计算机画出具体指数函数的图象,探索并理解指数函数的单调性与特殊点。

④ 在解决简单实际问题的过程中,体会指数函数是一类重要的函数模型(参见例2)。

(3) 对数函数

① 理解对数的概念及其运算性质,知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数;通过阅读材料,了解对数的发现历史以及对简化运算的作用。

② 通过具体实例,直观了解对数函数模型所刻画的数量关系,初步理解对数函数的概念,体会对数函数是一类重要的函数模型;能借助计算器或计算机画出具体对数函数的图象,探索并了解对数函数的单调性与特殊点。

③ 知道指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数 ($a>0$, $a\neq 1$)。

(4) 幂函数

通过实例,了解幂函数的概念;结合函数 $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=\frac{1}{x}$, $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象,了解它们的变化情况。

(5) 函数与方程

① 结合二次函数的图象,判断一元二次方程根的存在性及根的个数,从而了解函数的零点与方程根的联系。

② 根据具体函数的图象,能够借助计算器用二分法求相应方程的近似解,了解这种方法是求方程近似解的常用方法。

(6) 函数模型及其应用

① 利用计算工具,比较指数函数、对数函数以及幂函数增长差

异；结合实例体会直线上升、指数爆炸、对数增长等不同函数类型增长的含义。

② 收集一些社会生活中普遍使用的函数模型（指数函数、对数函数、幂函数、分段函数等）的实例，了解函数模型的广泛应用。

（7）实习作业

根据某个主题，收集 17 世纪前后发生的一些对数学发展起重大作用的历史事件和人物（开普勒、伽利略、笛卡儿、牛顿、莱布尼茨、欧拉等）的有关资料或现实生活中的函数实例，采取小组合作的方式写一篇有关函数概念的形成、发展或应用的文章，在班级中进行交流。具体要求参见数学文化的要求（参见第 104 页）。

说明与建议

1. 集合是一个不加定义的概念，教学中应结合学生的生活经验和已有数学知识，通过列举丰富的实例，使学生理解集合的含义。学习集合语言最好的方法是使用，在教学中要创设使学生运用集合语言进行表达和交流的情境和机会，以便学生在实际使用中逐渐熟悉自然语言、集合语言、图形语言各自的特点，进行相互转换并掌握集合语言。在关于集合之间的关系和运算的教学中，使用 Venn 图是重要的，有助于学生学习、掌握、运用集合语言和其他数学语言。

2. 函数概念的教学要从实际背景和定义两个方面帮助学生理解函数的本质。函数概念的引入一般有两种方法，一种方法是先学习映射，再学习函数；另一种方法是通过具体实例，体会数集之间的一种特殊的对应关系，即函数。考虑到多数高中学生的认知特点，为了有助于他们对函数概念本质的理解，建议采用后一种方式，从学生已掌握的具体函数和函数的描述性定义入手，引导学生联系自己的生活经历和实际问题，尝试列举各种各样的函数，构建函数的一般概念。再通过对指数函数、对数函数等具体函数的研究，加深学生对函数概念的理解。像函数这样的核心概念需要多次接触、反复体会、螺旋上升，逐步加深理解，才能真正掌握，灵活应用。

3. 在教学中,应强调对函数概念本质的理解,避免在求函数定义域、值域及讨论函数性质时出现过于繁琐的技巧训练,避免人为地编制一些求定义域和值域的偏题。

4. 指数幂的教学,应在回顾整数指数幂的概念及其运算性质的基础上,结合具体实例,引入有理指数幂及其运算性质,以及实数指数幂的意义及其运算性质,进一步体会“用有理数逼近无理数”的思想,并且可以让学生利用计算器或计算机进行实际操作,感受“逼近”过程。

5. 反函数的处理,只要求以具体函数为例进行解释和直观理解,例如,可通过比较同底的指数函数和对数函数,说明指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数 ($a>0, a\neq 1$)。不要求一般地讨论形式化的反函数定义,也不要求求已知函数的反函数。

6. 在函数应用的教学,教师要引导学生不断地体验函数是描述客观世界变化规律的基本数学模型,体验指数函数、对数函数等函数与现实世界的密切联系及其在刻画现实问题中的作用。

7. 应注意鼓励学生运用现代教育技术学习、探索和解决问题。例如,利用计算器、计算机画出指数函数、对数函数等的图象,探索、比较它们的变化规律,研究函数的性质,求方程的近似解等。

参考案例

例 1 田径队的小刚同学,在教练指导下进行3 000米跑的训练,训练计划要求是:

(1) 起跑后,匀加速,10秒后达到每秒5米的速度,然后匀速跑到2分;

(2) 开始均匀减速,到5分时已减到每秒4米,再保持匀速跑4分时间;

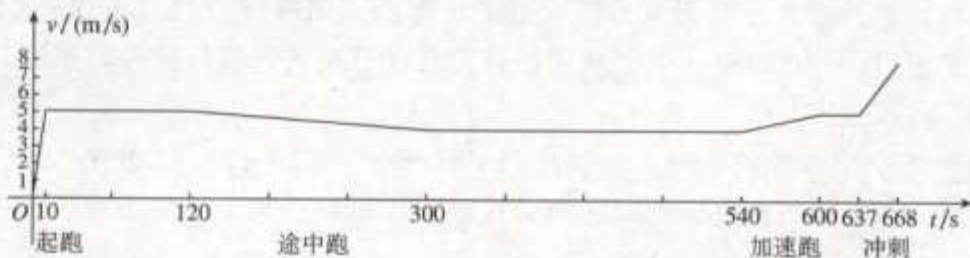
(3) 在1分之内,逐渐加速达到每秒5米的速度,保持匀速往下跑;

(4) 最后200米,均匀加速冲刺,使撞线时的速度达到每秒8米。

请按照上面的要求，解决下面的问题。

- (1) 画出小刚跑步的时间与速度的函数图象。
- (2) 写出小刚进行长跑训练时，跑步速度关于时间的函数。
- (3) 按照上边的要求，计算跑完3 000米的所用时间。

解：(1)



(2)

$$v(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & t \in [0, 10], \\ 5, & t \in (10, 120], \\ -\frac{t}{180} + \frac{17}{3}, & t \in (120, 300], \\ 4, & t \in (300, 540], \\ \frac{t}{60} - 5, & t \in (540, 600], \\ 5, & t \in (600, 637], \\ \frac{39t - 22\ 843}{400}, & t \in (637, 668]. \end{cases}$$

(3) 略。

例 2 家用电器（如冰箱等）使用的氟化物的释放破坏了大气上层的臭氧层。臭氧含量 Q 呈指数函数型变化，满足关系式 $Q = Q_0 e^{-0.0025t}$ ，其中 Q_0 是臭氧的初始量。

- (1) 随时间的增加，臭氧的含量是增加还是减少？
- (2) 多少年以后将会有一半的臭氧消失？

数 学 2

在本模块中，学生将学习立体几何初步、平面解析几何初步。

几何学是研究现实世界中物体的形状、大小与位置关系的数学学科。人们通常采用直观感知、操作确认、思辨论证、度量计算等方法认识和探索几何图形及其性质。三维空间是人类生存的现实空间，认识空间图形，培养和发展学生的空间想像能力、推理论证能力、运用图形语言进行交流的能力以及几何直观能力，是高中阶段数学必修系列课程的基本要求。在立体几何初步部分，学生将先从对空间几何体的整体观察入手，认识空间图形；再以长方体为载体，直观认识和理解空间点、线、面的位置关系；能用数学语言表述有关平行、垂直的性质与判定，并对某些结论进行论证。学生还将了解一些简单几何体的表面积与体积的计算方法。

解析几何是 17 世纪数学发展的重大成果之一，其本质是用代数方法研究图形的几何性质，体现了数形结合的重要数学思想。在本模块中，学生将在平面直角坐标系中建立直线和圆的代数方程，运用代数方法研究它们的几何性质及其相互位置关系，并了解空间直角坐标系。体会数形结合的思想，初步形成用代数方法解决几何问题的能力。

内容与要求

1. 立体几何初步（约 18 课时）

(1) 空间几何体

① 利用实物模型、计算机软件观察大量空间图形，认识柱、锥、台、球及其简单组合体的结构特征，并能运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构。

② 能画出简单空间图形（长方体、球、圆柱、圆锥、棱柱等的简易组合）的三视图，能识别上述的三视图所表示的立体模型，会使用材料（如纸板）制作模型，会用斜二侧法画出它们的直观图。

③ 通过观察用两种方法（平行投影与中心投影）画出的视图与直观图，了解空间图形的不同表示形式。

④ 完成实习作业，如画出某些建筑的视图与直观图（在不影响图形特征的基础上，尺寸、线条等不作严格要求）。

⑤ 了解球、棱柱、棱锥、台的表面积和体积的计算公式（不求记忆公式）。

（2）点、线、面之间的位置关系

① 借助长方体模型，在直观认识和理解空间点、线、面的位置关系的基础上，抽象出空间线、面位置关系的定义，并了解如下可以作为推理依据的公理和定理。

◆ 公理 1：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线在此平面内。

◆ 公理 2：过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面。

◆ 公理 3：如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线。

◆ 公理 4：平行于同一条直线的两条直线平行。

◆ 定理：空间中如果两个角的两条边分别对应平行，那么这两个角相等或互补。

② 以立体几何的上述定义、公理和定理为出发点，通过直观感知、操作确认、思辨论证，认识和理解空间中线面平行、垂直的有关性质与判定。

通过直观感知、操作确认，归纳出以下判定定理。

◆ 平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行。

◆ 一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行。

◆ 一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，则该直线与此平面垂直。

◆ 一个平面过另一个平面的垂线，则两个平面垂直。

通过直观感知、操作确认，归纳出以下性质定理，并加以证明。

◆ 一条直线与一个平面平行，则过该直线的任一个平面与此平面的交线与该直线平行。

◆ 两个平面平行，则任意一个平面与这两个平面相交所得的交线相互平行。

◆ 垂直于同一个平面的两条直线平行。

◆ 两个平面垂直，则一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直。

③ 能运用已获得的结论证明一些空间位置关系的简单命题。

2. 平面解析几何初步（约 18 课时）

(1) 直线与方程

① 在平面直角坐标系中，结合具体图形，探索确定直线位置的几何要素。

② 理解直线的倾斜角和斜率的概念，经历用代数方法刻画直线斜率的过程，掌握过两点的直线斜率的计算公式。

③ 能根据斜率判定两条直线平行或垂直。

④ 根据确定直线位置的几何要素，探索并掌握直线方程的几种形式（点斜式、两点式及一般式），体会斜截式与一次函数的关系。

⑤ 能用解方程组的方法求两直线的交点坐标。

⑥ 探索并掌握两点间的距离公式、点到直线的距离公式，会求两条平行直线间的距离。

(2) 圆与方程

① 回顾确定圆的几何要素，在平面直角坐标系中，探索并掌握圆的标准方程与一般方程。

② 能根据给定直线、圆的方程，判断直线与圆、圆与圆的位置关系。

③ 能用直线和圆的方程解决一些简单的问题。

(3) 在平面解析几何初步的学习过程中, 体会用代数方法处理几何问题的思想。

(4) 空间直角坐标系

① 通过具体情境, 感受建立空间直角坐标系的必要性, 了解空间直角坐标系, 会用空间直角坐标系刻画点的位置。

② 通过表示特殊长方体(所有棱分别与坐标轴平行)顶点的坐标, 探索并得出空间两点间的距离公式。

说明与建议

1. 立体几何初步的教学重点是帮助学生逐步形成空间想像能力。本部分内容的设计遵循从整体到局部、具体到抽象的原则, 教师应提供丰富的实物模型或利用计算机软件呈现的空间几何体, 帮助学生认识空间几何体的结构特征, 并能运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构, 巩固和提高义务教育阶段有关三视图的学习和理解, 帮助学生运用平行投影与中心投影, 进一步掌握在平面上表示空间图形的方法和技能(参见例1)。

2. 几何教学应注意引导学生通过对实际模型的认识, 学会将自然语言转化为图形语言和符号语言。教师可以使用具体的长方体的点、线、面关系作为载体, 使学生在直观感知的基础上, 认识空间中一般的点、线、面之间的位置关系; 通过对图形的观察、实验和说理, 使学生进一步了解平行、垂直关系的基本性质以及判定方法, 学会准确地使用数学语言表述几何对象的位置关系, 并能解决一些简单的推理论证及应用问题(参见例2)。

3. 立体几何初步的教学中, 要求对有关线面平行、垂直关系的性质定理进行证明; 对相应的判定定理只要求直观感知、操作确认, 在选修系列2中将用向量方法加以论证。

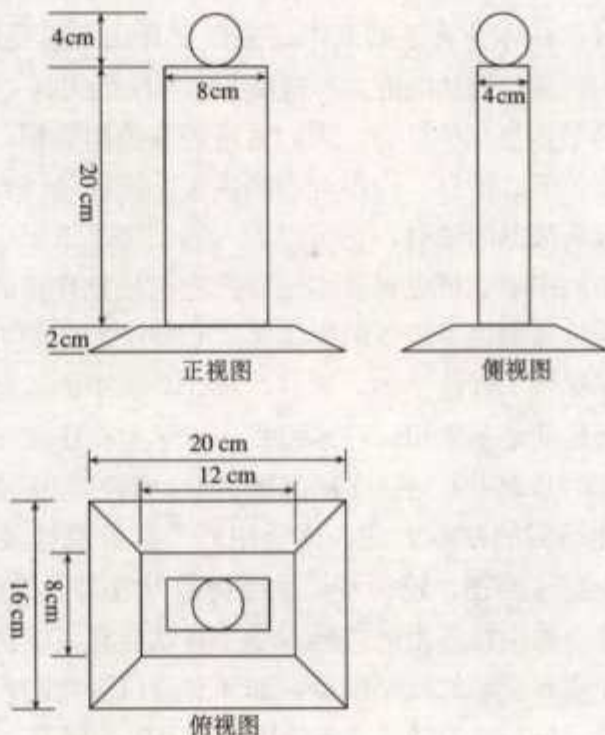
4. 有条件的学校应在教学过程中恰当地使用现代信息技术展示空间图形, 为理解和掌握图形几何性质(包括证明)的教学提供形象的支持, 提高学生的几何直观能力。教师可以指导和帮助学生运

用立体几何知识选择课题，进行探究。

5. 在平面解析几何初步的教学中，教师应帮助学生经历如下的过程：首先将几何问题代数化，用代数的语言描述几何要素及其关系，进而将几何问题转化为代数问题；处理代数问题；分析代数结果的几何含义，最终解决几何问题。这种思想应贯穿平面解析几何教学的始终，帮助学生不断地体会“数形结合”的思想方法。

参考案例

例1 如图，这是一个奖杯的三视图，请你画出它的直观图，并求出这个奖杯的体积。



例1图

例2 观察自己的教室，说出观察到的点、线、面之间的位置关系，并说明理由。

数 学 3

在本模块中，学生将学习算法初步、统计、概率。

算法是数学及其应用的重要组成部分，是计算科学的重要基础。随着现代信息技术飞速发展，算法在科学技术、社会发展中发挥着越来越大的作用，并日益融入社会生活的许多方面，算法思想已经成为现代人应具备的一种数学素养。需要特别指出的是，中国古代数学中蕴涵了丰富的算法思想。在本模块中，学生将在义务教育阶段初步感受算法思想的基础上，结合对具体数学实例的分析，体验程序框图在解决问题中的作用；通过模仿、操作、探索，学习设计程序框图表达解决问题的过程；体会算法的基本思想以及算法的重要性和有效性，发展有条理的思考与表达的能力，提高逻辑思维能力。

现代社会是信息化的社会，人们常常需要收集数据，根据所获得的数据提取有价值的信息，作出合理的决策。统计是研究如何合理收集、整理、分析数据的学科，它可以为人们制定决策提供依据。随机现象在日常生活中随处可见，概率是研究随机现象规律的学科，它为人们认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法，同时为统计学的发展提供了理论基础。因此，统计与概率的基础知识已经成为一个未来公民的必备常识。在本模块中，学生将在义务教育阶段学习统计与概率的基础上，通过实际问题情境，学习随机抽样、样本估计总体、线性回归的基本方法，体会用样本估计总体及其特征的思想；通过解决实际问题，较为系统地经历数据收集与处理的全过程，体会统计思维与确定性思维的差异。学生将结合具体实例，学习概率的某些基本性质和简单的概率模型，加深对随机现象的理解，能通过实验、计算器（机）模拟估计简单随机事件发生的概率。

内容与要求

1. 算法初步（约 12 课时）

（1）算法的含义、程序框图

① 通过对解决具体问题过程与步骤的分析（如二元一次方程组求解等问题），体会算法的思想，了解算法的含义。

② 通过模仿、操作、探索，经历通过设计程序框图表达解决问题的过程。在具体问题的解决过程中（如三元一次方程组求解等问题），理解程序框图的三种基本逻辑结构：顺序、条件分支、循环。

（2）基本算法语句

经历将具体问题的程序框图转化为程序语句的过程，理解几种基本算法语句——输入语句、输出语句、赋值语句、条件语句、循环语句，进一步体会算法的基本思想。

（3）通过阅读中国古代数学中的算法案例，体会中国古代数学对世界数学发展的贡献。

2. 统计（约 16 课时）

（1）随机抽样

① 能从现实生活或其他学科中提出具有一定价值的统计问题。

② 结合具体的实际问题情境，理解随机抽样的必要性和重要性。

③ 在参与解决统计问题的过程中，学会用简单随机抽样方法从总体中抽取样本；通过对实例的分析，了解分层抽样和系统抽样方法。

④ 能通过试验、查阅资料、设计调查问卷等方法收集数据。

（2）用样本估计总体

① 通过实例体会分布的意义和作用，在表示样本数据的过程中，学会列频率分布表、画频率分布直方图、频率折线图、茎叶图（参见例 1），体会它们各自的特点。

② 通过实例理解样本数据标准差的意义和作用，学会计算数据标准差。

③ 能根据实际问题的需求合理地选取样本，从样本数据中提取基本的数字特征（如平均数、标准差），并作出合理的解释。

④ 在解决统计问题的过程中,进一步体会用样本估计总体的思想,会用样本的频率分布估计总体分布,会用样本的基本数字特征估计总体的基本数字特征;初步体会样本频率分布和数字特征的随机性。

⑤ 会用随机抽样的基本方法和样本估计总体的思想,解决一些简单的实际问题;能通过对数据的分析为合理的决策提供一些依据,认识统计的作用,体会统计思维与确定性思维的差异。

⑥ 形成对数据处理过程进行初步评价的意识。

(3) 变量的相关性

① 通过收集现实问题中两个有关联变量的数据作出散点图,并利用散点图直观认识变量间的相关关系。

② 经历用不同估算方法描述两个变量线性相关的过程。知道最小二乘法的思想,能根据给出的线性回归方程系数公式建立线性回归方程(参见例2)。

3. 概率(约8课时)

(1) 在具体情境中,了解随机事件发生的不确定性和频率的稳定性,进一步了解概率的意义以及频率与概率的区别。

(2) 通过实例,了解两个互斥事件的概率加法公式。

(3) 通过实例,理解古典概型及其概率计算公式,会用列举法计算一些随机事件所含的基本事件数及事件发生的概率。

(4) 了解随机数的意义,能运用模拟方法(包括计算器产生随机数来进行模拟)估计概率,初步体会几何概型的意义(参见例3)。

(5) 通过阅读材料,了解人类认识随机现象的过程。

说明与建议

1. 算法是高中数学课程中新内容,其思想是非常重要的,但并不神秘。例如,运用消元法解二元一次方程组、求最大公因数等的过程就是算法。本模块中的算法内容是将数学中的算法与计算机技术建立联系,形式化地表示算法,在条件允许的学校,使其能在计算机上实现。为了有条理地、清晰地表达算法,往往需要将解决问

题的过程整理成程序框图；为了能在计算机上实现，还需要将自然语言或程序框图翻译成计算机语言。本模块的主要目的是使学生体会算法的思想，提高逻辑思维能力。不要将此部分内容简单处理成程序语言的学习和程序设计。

2. 算法教学必须通过实例进行，使学生在解决具体问题的过程中学习一些基本逻辑结构和语句。有条件的学校，应鼓励学生尽可能上机尝试。

3. 算法除作为本模块的内容之外，其思想方法应渗透在高中数学课程其他有关内容中，鼓励学生尽可能地运用算法解决相关问题。

4. 教师应引导学生体会统计的作用和基本思想，统计的特征之一是通过部分的数据来推测全体数据的性质。学生应体会统计思维与确定性思维的差异，注意到统计结果的随机性，统计推断是有可能犯错误的。

5. 统计是为了从数据中提取信息，教学时应引导学生根据实际问题的需求选择不同的方法合理地选取样本，并从样本数据中提取需要的数字特征。不应把统计处理成数字运算和画图表。对统计中的概念（如“总体”“样本”等）应结合具体问题进行描述性说明，不应追求严格的形式化定义。

6. 统计教学必须通过案例来进行。教学中应通过对一些典型案例的处理，使学生经历较为系统的数据处理全过程，并在此过程中学习一些数据处理的方法，并运用所学知识、方法去解决实际问题。例如，在学习线性相关的内容时，教师可以鼓励学生探索用多种方法确定线性回归直线。在此基础上，教师可以引导学生体会最小二乘法的思想，根据给出的公式求线性回归方程。对感兴趣的学生，教师可以鼓励他们尝试推导线性回归方程。

7. 概率教学的核心问题是让学生了解随机现象与概率的意义。教师应通过日常生活中的大量实例，鼓励学生动手试验，正确理解随机事件发生的不确定性及其频率的稳定性，并尝试澄清日常生活

遇到的一些错误认识（如“中奖率为 $\frac{1}{1\,000}$ 的彩票，买1 000张一定中奖”）。

8. 古典概型的教学应让学生通过实例理解古典概型的特征：实验结果的有限性和每一个实验结果出现的等可能性。让学生初步学会把一些实际问题化为古典概型。教学中不要把重点放在“如何计数”上。

9. 应鼓励学生尽可能运用计算器、计算机来处理数据，进行模拟活动，更好地体会统计思想和概率的意义。例如，可以利用计算器产生随机数来模拟掷硬币的试验等。

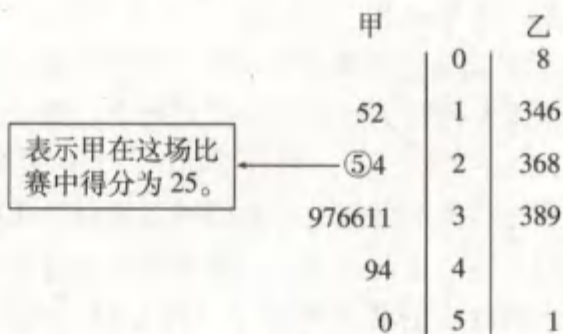
参考案例

例 1 某赛季甲、乙两名篮球运动员每场比赛得分情况如下。

甲的得分：12, 15, 24, 25, 31, 31, 36, 36, 37, 39, 44, 49, 50。

乙的得分：8, 13, 14, 16, 23, 26, 28, 33, 38, 39, 51。

上述的数据可以用下图来表示，中间数字表示得分的十位数，两边数字分别表示两个人各场比赛得分的个位数。



通常把这样的图叫做茎叶图。请根据上图对两名运动员的成绩进行比较。

从这个茎叶图上可以看出，甲运动员的得分情况是大致对称的，中位数是 36；乙运动员的得分情况除一个特殊得分外，也大致对

称，中位数是 26。因此甲运动员发挥比较稳定，总体得分情况比乙好。

用茎叶图表示有两个突出的优点，其一，从统计图上没有信息的损失，所有的信息都可以从这个茎叶图中得到；其二，茎叶图可以在比赛时随时记录，方便记录与表示。但茎叶图只能表示两位的整数，虽然可以表示两个人以上的比赛结果（或两个以上的记录），但没有表示两个记录那么直观、清晰。

例 2 下表是某小卖部 6 天卖出热茶的杯数与当天气温的对比表。

气温/ $^{\circ}\text{C}$	杯数
26	20
18	24
13	34
10	38
4	50
-1	64

- (1) 将上表中的数据制成散点图；
- (2) 你能从散点图中发现温度与饮料杯数近似成什么关系吗？
- (3) 如果近似成线性关系的话，请画出一条直线来近似地表示这种线性关系；
- (4) 如果某天的气温是 -5°C ，预测这天小卖部卖出热茶的杯数。

当运用直线近似表示温度与杯数的关系时，学生可能选择能反映直线变化的两个点，例如 $(4, 50)$ ， $(18, 24)$ 确定一条直线；也可以取一条直线，使得直线一侧和另一侧点的个数基本相同；还可

能多取几组点，确定几条直线方程，再分别算出各条直线斜率、截距的算术平均值，作为所求直线的斜率、截距。

例3 在所示的图中随机撒一大把豆子（可以利用计算器、计算机模拟这一过程），计算落在圆中的豆子数与落在正方形中的豆子数之比。由此估计圆周率的值，并初步体会几何概型的意义。



例3图

数 学 4

在本模块中，学生将学习三角函数、平面上的向量（简称平面向量）、三角恒等变换。

三角函数是基本初等函数，它是描述周期现象的重要数学模型，在数学和其他领域中具有重要的作用。在本模块中，学生将通过实例，学习三角函数及其基本性质，体会三角函数在解决具有周期变化规律的问题中的作用。

向量是近代数学中重要和基本的数学概念之一，它是沟通代数、几何与三角函数的一种工具，有着极其丰富的实际背景。在本模块中，学生将了解向量丰富的实际背景，理解平面向量及其运算的意义，能用向量语言和方法表述和解决数学和物理中的一些问题，发展运算能力和解决实际问题的能力。

三角恒等变换在数学中有一定的应用，同时有利于发展学生的推理能力和运算能力。在本模块中，学生将运用向量的方法推导基本的三角恒等变换公式，由此出发导出其他的三角恒等变换公式，并能运用这些公式进行简单的恒等变换。

内容与要求

1. 三角函数（约16课时）

(1) 任意角、弧度

了解任意角的概念和弧度制，能进行弧度与角度的互化。

(2) 三角函数

① 借助单位圆理解任意角三角函数（正弦、余弦、正切）的定义。

② 借助单位圆中的三角函数线推导出诱导公式($\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$ 的正弦、余弦、正切)，能画出 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ 的图象，了解三角函数的周期性。

③ 借助图象理解正弦函数、余弦函数在 $[0, 2\pi]$ ，正切函数在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的性质（如单调性、最大和最小值、图象与 x 轴交点等）。

④ 理解同角三角函数的基本关系式：

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

⑤ 结合具体实例，了解 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的实际意义；能借助计算器或计算机画出 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象，观察参数 A , ω , φ 对函数图象变化的影响。

⑥ 会用三角函数解决一些简单实际问题，体会三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型。

2. 平面向量（约 12 课时）

(1) 平面向量的实际背景及基本概念

通过力和力的分析等实例，了解向量的实际背景，理解平面向量和向量相等的含义，理解向量的几何表示。

(2) 向量的线性运算

① 通过实例，掌握向量加、减法的运算，并理解其几何意义。

② 通过实例，掌握向量数乘的运算，并理解其几何意义，以及两个向量共线的含义。

③ 了解向量的线性运算性质及其几何意义。

(3) 平面向量的基本定理及坐标表示

- ① 了解平面向量的基本定理及其意义。
- ② 掌握平面向量的正交分解及其坐标表示。
- ③ 会用坐标表示平面向量的加、减与数乘运算。
- ④ 理解用坐标表示的平面向量共线的条件。

(4) 平面向量的数量积

① 通过物理中“功”等实例，理解平面向量数量积的含义及其物理意义。

- ② 体会平面向量的数量积与向量投影的关系。
- ③ 掌握数量积的坐标表达式，会进行平面向量数量积的运算。

④ 能运用数量积表示两个向量的夹角，会用数量积判断两个平面向量的垂直关系。

(5) 向量的应用

经历用向量方法解决某些简单的平面几何问题、力学问题与其他一些实际问题的过程，体会向量是一种处理几何问题、物理问题等的工具，发展运算能力和解决实际问题的能力。

3. 三角恒等变换（约 8 课时）

(1) 经历用向量的数量积推导出两角差的余弦公式的过程，进一步体会向量方法的作用。

(2) 能从两角差的余弦公式导出两角和与差的正弦、余弦、正切公式，二倍角的正弦、余弦、正切公式，了解它们的内在联系。

(3) 能运用上述公式进行简单的恒等变换（包括引导导出积化和差、和差化积、半角公式，但不要求记忆）。

说明与建议

1. 在三角函数的教学中，教师应根据学生的生活经验，创设丰富的情境，使学生体会三角函数模型的意义。例如，通过单摆、弹簧振子、圆上一点的运动，以及音乐、波浪、潮汐、四季变化等实例，使学生感受周期现象的广泛存在，认识周期现象的变化规律，体会三角函数是刻画周期现象的重要模型（参见例 1）。

2. 在三角函数的教学中,应发挥单位圆的作用。单位圆可以帮助学生直观地认识任意角、任意角的三角函数,理解三角函数的周期性、诱导公式、同角三角函数关系式,以及三角函数的图象和基本性质。借助单位圆的直观,教师可以引导学生自主地探索三角函数的有关性质,培养他们分析问题和解决问题的能力。

3. 提醒学生重视学科之间的联系与综合,在学习其他学科的相关内容(如单摆运动、波的传播、交流电)时,注意运用三角函数来分析和理解。

4. 弧度是学生比较难接受的概念,教学中应使学生体会弧度也是一种度量角的单位(圆周的 $\frac{1}{2\pi}$ 所对的圆心角或周角的 $\frac{1}{2\pi}$)。随着后续课程的学习,他们将会逐步理解这一概念,在此不必深究。

5. 向量概念的教学应从物理背景和几何背景入手,物理背景是力、速度、加速度等概念,几何背景是有向线段。了解这些物理背景和几何背景,对于学生理解向量概念和运用向量解决实际问题都是十分重要的。教师还可以引导学生运用向量解决一些物理和几何问题。例如,利用向量计算力使物体沿某方向运动所做的功,利用向量解决平面内两条直线平行与垂直的位置关系等问题。对于向量的非正交分解只要求学生作一般了解,不必展开。

6. 在三角恒等变换的教学中,可以引导学生利用向量的数量积推导出两角差的余弦公式,并由此公式推导出两角和与差的正弦、余弦、正切公式,二倍角的正弦、余弦、正切公式。鼓励学生独立探索和讨论交流,引导学生推导积化和差、和差化积、半角公式,以此作为三角恒等变换的基本训练。

7. 在本模块的教学中,应鼓励学生使用计算器和计算机探索 and 解决问题。例如,求三角函数值,求解测量问题,分析 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中参数变化对函数的影响等。在三角函数、平面上的向量和三角恒等变换相应的内容中可以插入数学探究或数学建模活动。

参考案例

例 1 海水受日月的引力，在一定的时候发生涨落的现象叫潮，一般地早潮叫潮，晚潮叫汐。在通常情况下，船在涨潮时驶进航道，靠近船坞；卸货后落潮时返回海洋。下面是某港口在某季节每天的时间与水深关系表：

时刻	水深/米	时刻	水深/米	时刻	水深/米
0:00	5.0	9:00	2.5	18:00	5.0
3:00	7.5	12:00	5.0	21:00	2.5
6:00	5.0	15:00	7.5	24:00	5.0

(1) 选用一个三角函数来近似描述这个港口的水深与时间的函数关系，给出整点时的水深的近似数值；

(2) 一条货船的吃水深度（船底与水面的距离）为 4 米，安全条例规定至少要有 1.5 米的安全间隙（船底与洋底的距离），该船何时能进入港口？在港口能呆多久？

(3) 若某船的吃水深度为 4 米，安全间隙为 1.5 米，该船在 2:00 开始卸货，吃水深度以每小时 0.3 米的速度减少，那么该船在什么时间必须停止卸货，将船驶向较深的水域？

数 学 5

在本模块中，学生将学习解三角形、数列、不等式。

学生将在已有知识的基础上，通过对任意三角形边角关系的探究，发现并掌握三角形中的边长与角度之间的数量关系，并认识到运用它们可以解决一些与测量和几何计算有关的实际问题。

数列作为一种特殊的函数，是反映自然规律的基本数学模型。在本模块中，学生将通过日常生活中大量实际问题的分析，建立等差数列和等比数列这两种数列模型，探索并掌握它们的一些基本数量关系，感受这两种数列模型的广泛应用，并利用它们解决一些

实际问题。

不等关系与相等关系都是客观事物的基本数量关系，是数学研究的重要内容。建立不等观念、处理不等关系与处理等量问题是同样重要的。在本模块中，学生将通过具体情境，感受在现实世界和日常生活中存在着大量的不等关系，理解不等式（组）对于刻画不等关系的意义和价值；掌握求解一元二次不等式的基本方法，并能解决一些实际问题；能用二元一次不等式组表示平面区域，并尝试解决一些简单的二元线性规划问题；认识基本不等式及其简单应用；体会不等式、方程及函数之间的联系。

内容与要求

1. 解三角形（约 8 课时）

(1) 通过对任意三角形边长和角度关系的探索，掌握正弦定理、余弦定理，并能解决一些简单的三角形度量问题。

(2) 能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的实际问题。

2. 数列（约 12 课时）

(1) 数列的概念和简单表示法

通过日常生活中的实例，了解数列的概念和几种简单的表示方法（列表、图象、通项公式），了解数列是一种特殊函数。

(2) 等差数列、等比数列

① 通过实例，理解等差数列、等比数列的概念。

② 探索并掌握等差数列、等比数列的通项公式与前 n 项和的公式。

③ 能在具体的问题情境中，发现数列的等差关系或等比关系，并能用有关知识解决相应的问题（参见例 1）。

④ 体会等差数列、等比数列与一次函数、指数函数的关系。

3. 不等式（约 16 课时）

(1) 不等关系

通过具体情境，感受在现实世界和日常生活中存在着大量的不等关系，了解不等式（组）的实际背景。

(2) 一元二次不等式

- ① 经历从实际情境中抽象出一元二次不等式模型的过程。
- ② 通过函数图象了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系。
- ③ 会解一元二次不等式，对给定的一元二次不等式，尝试设计求解的程序框图。

(3) 二元一次不等式组与简单线性规划问题

- ① 从实际情境中抽象出二元一次不等式组。
- ② 了解二元一次不等式的几何意义，能用平面区域表示二元一次不等式组（参见例 2）。
- ③ 从实际情境中抽象出一些简单的二元线性规划问题，并能加以解决（参见例 3）。

(4) 基本不等式： $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ($a, b \geq 0$)。

- ① 探索并了解基本不等式的证明过程。
- ② 会用基本不等式解决简单的最大（小）值问题（参见例 4）。

说明与建议

1. 解三角形的教学要重视正弦定理和余弦定理在探索三角形边角关系中的作用，引导学生认识它们是解决测量问题的一种方法，不必在恒等变形上进行过于繁琐的训练。

2. 等差数列和等比数列有着广泛的应用，教学中应重视通过具体实例（如教育贷款、购房贷款、放射性物质的衰变、人口增长等），使学生理解这两种数列模型的作用，培养学生从实际问题中抽象出数列模型的能力。

3. 在数列的教学中，应保证基本技能的训练，引导学生通过必要的练习，掌握数列中各量之间的基本关系。但训练要控制难度和

复杂程度。

4. 一元二次不等式教学中，应注重使学生了解一元二次不等式的实际背景。求解一元二次不等式，首先可求出相应方程的根，然后根据相应函数的图象求出不等式的解；也可以运用代数的方法求解。鼓励学生设计求解一元二次不等式的程序框图。

5. 不等式有丰富的实际背景，是刻画区域的重要工具。刻画区域是解决线性规划问题的一个基本步骤，教学中可以从实际背景引入二元一次不等式组。

6. 线性规划是优化的具体模型之一。在本模块的教学中，教师应引导学生体会线性规划的基本思想，借助几何直观解决一些简单的线性规划问题，不必引入很多名词。

参考案例

例1 教育储蓄的收益与比较。

要求学生收集本地区有关教育储蓄的信息，思考以下问题。

(1) 依教育储蓄的方式，每月存 50 元，连续存 3 年，到期（3 年）或 6 年时一次可支取本息共多少元？

(2) 依教育储蓄的方式，每月存 a 元，连续存 3 年，到期（3 年）或 6 年时一次可支取本息共多少元？

(3) 依教育储蓄的方式，每月存 50 元，连续存 3 年，到期（3 年）时一次可支取本息比同档次的“零存整取”多收益多少元？

(4) 欲在 3 年后一次支取教育储蓄本息合计 1 万元，每月应存入多少元？

(5) 欲在 3 年后一次支取教育储蓄本息合计 a 万元，每月应存入多少元？

(6) 依教育储蓄的方式，原打算每月存 100 元，连续存 6 年，可是到 4 年时，学生需要提前支取全部本息，一次可支取本息共多少元？

(7) 依教育储蓄的方式，原打算每月存 a 元，连续存 6 年，可是

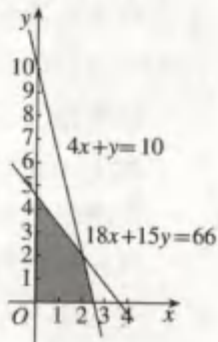
到 b 年时, 学生需要提前支取全部本息, 一次可支取本息共多少元?

(8) 开放题: 不用教育储蓄的方式, 而用其他的储蓄形式, 以每月可存 100 元, 6 年后使用为例, 探讨以现行的利率标准可能的最大收益, 将得到的结果与教育储蓄比较。

例 2 一个化肥厂生产甲、乙两种混合肥料, 生产 1 车皮甲种肥料需要的主要原料是磷酸盐 4 吨、硝酸盐 18 吨, 产生的利润为 10 000 元; 生产 1 车皮乙种肥料需要的主要原料是磷酸盐 1 吨、硝酸盐 15 吨, 产生的利润为 5 000 元。现有库存磷酸盐 10 吨、硝酸盐 66 吨, 在此基础上进行生产。请列出条件的数学关系式, 并画出其图象。

解: 设 x, y 分别为计划生产甲、乙两种混合肥料的车皮数, 于是

$$\begin{cases} 4x + y \leq 10, \\ 18x + 15y \leq 66, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$



例 2 图

例 3 某厂拟生产甲、乙两种试销产品, 每件销售收入分别为 3 千元、2 千元。甲、乙产品都需要在 A, B 两种设备上加工, 在每台 A, B 上加工一件甲所需工时分别为 1 时、2 时, 加工一件乙所需工时分别为 2 时、1 时, A, B 两种设备每月有效使用台时数分别为 400 和 500。如何安排生产可使收入最大?

解: 这个问题的数学模型是二元线性规划。

设甲、乙两种产品的产量分别为 x, y 件, 约束条件是

$$\begin{cases} x + 2y \leq 400, \\ 2x + y \leq 500, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$$

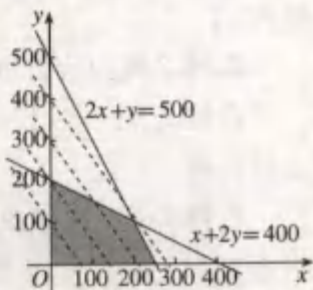
目标函数是 $f=3x+2y$ 。

要求出适当的 x, y , 使 $f=3x+2y$ 取得最大值。

先要画出可行域, 如图。考虑 $3x+2y=a$, a 是参数, 将它变形为 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{a}{2}$,

这是斜率为 $-\frac{3}{2}$ 、随 a 变化的一族直线。

$\frac{a}{2}$ 是直线在 y 轴上的截距, 当 $\frac{a}{2}$ 最大时 a 最大, 当然直线要与可行域相交, 即在满足约束条件时目标函数取得最大值。



例 3 图

在这个问题中, 使 $3x+2y$ 取得最大值的 (x, y) 是两直线 $2x+y=500$ 与 $x+2y=400$ 的交点 $(200, 100)$ 。

因此, 甲、乙两种产品的每月产量分别为 200、100 件时, 可得最大收入 800 千元。

例 4 某工厂建造一个长方体无盖贮水池, 其容积为 $4\ 800\text{ m}^3$, 深度为 3 m 。如果池底每 1 m^2 的造价为 150 元, 池壁每 1 m^2 的造价为 120 元, 怎样设计水池能使总造价最低, 最低总造价是多少元?

二、选修课程

系列 1, 系列 2 说明

在完成必修课程学习的基础上, 希望进一步学习数学的学生, 可以根据自己的兴趣和需求, 选择学习系列 1, 系列 2。

系列 1 是为希望在人文、社会科学等方面发展的学生而设置的, 包括 2 个模块, 共 4 学分。系列 2 则是为希望在理工、经济等方面发展的学生设置的, 包括 3 个模块, 共 6 学分。

系列 1 的内容分别为:

选修 1-1: 常用逻辑用语、圆锥曲线与方程、导数及其应用。

选修 1-2: 统计案例、推理与证明、数系扩充与复数的引入、框图。

系列 2 的内容分别为:

选修 2-1: 常用逻辑用语、圆锥曲线与方程、空间中的向量与立体几何。

选修 2-2: 导数及其应用、推理与证明、数系的扩充与复数的引入。

选修 2-3: 计数原理、统计案例、概率。

在系列 1、系列 2 的课程中, 有一些内容及要求是相同的, 例如, 常用逻辑用语、统计案例、数系扩充与复数等; 有一些内容基本相同, 但要求不同, 如导数及其应用、圆锥曲线与方程、推理与证明; 还有一些内容是不同的, 如系列 1 中安排了框图等内容, 系列 2 安排了空间中的向量与立体几何、计数原理、离散型随机变量及其分布等内容。

系 列 1

选修 1-1

本模块中, 学生将学习常用逻辑用语、圆锥曲线与方程、导数及其应用。

正确地使用逻辑用语是现代公民应该具备的基本素质。无论是进行思考、交流, 还是从事各项工作, 都需要正确地运用逻辑用语表达自己的思想。在本模块中, 学生将在义务教育阶段的基础上, 学习常用逻辑用语, 体会逻辑用语在表述和论证中的作用, 利用这些逻辑用语准确地表达数学内容, 更好地进行交流。

在必修课程学习平面解析几何初步的基础上, 在本模块中, 学生将学习圆锥曲线与方程, 了解圆锥曲线与二次方程的关系, 掌握

圆锥曲线的基本几何性质，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用，进一步体会数形结合的思想。

微积分的创立是数学发展中的里程碑，它的发展及广泛应用开创了向近代数学过渡的新时期，它为研究变量与函数提供了重要的方法和手段。导数的概念是微积分的核心概念之一，它有极其丰富的实际背景和广泛的应用。在本模块中，学生将通过大量实例，经历由平均变化率到瞬时变化率刻画现实问题的过程，理解导数的含义，体会导数的思想及其内涵；应用导数探索函数的单调、极值等性质及其在实际中的应用，感受导数在解决数学问题和实际问题中的作用，体会微积分的产生对人类文化发展的价值。

内容与要求

1. 常用逻辑用语（约 8 课时）

(1) 命题及其关系

- ① 了解命题的逆命题、否命题与逆否命题。
- ② 理解必要条件、充分条件与充要条件的意义，会分析四种命题的相互关系。

(2) 简单的逻辑联结词

通过数学实例，了解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义。

(3) 全称量词与存在量词

- ① 通过生活和数学中的丰富实例，理解全称量词与存在量词的意义。
- ② 能正确地对含有一个量词的命题进行否定。

2. 圆锥曲线与方程（约 12 课时）

(1) 了解圆锥曲线的实际背景，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用。

(2) 经历从具体情境中抽象出椭圆模型的过程（参见例 1），掌握椭圆的定义、标准方程及简单几何性质。

(3) 了解抛物线、双曲线的定义、几何图形和标准方程，知道

它们的简单几何性质。

(4) 通过圆锥曲线与方程的学习,进一步体会数形结合的思想。

(5) 了解圆锥曲线的简单应用。

3. 导数及其应用 (约 16 课时)

(1) 导数概念及其几何意义

① 通过对大量实例的分析,经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程,了解导数概念的实际背景,知道瞬时变化率就是导数,体会导数的思想及其内涵(参见例 2、例 3)。

② 通过函数图象直观地理解导数的几何意义。

(2) 导数的运算

① 能根据导数定义,求函数 $y=c$, $y=x$, $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$ 的导数。

② 能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数。

③ 会使用导数公式表。

(3) 导数在研究函数中的应用

① 结合实例,借助几何直观探索并了解函数的单调性与导数的关系(参见例 4);能利用导数研究函数的单调性,会求不超过三次的多项式函数的单调区间。

② 结合函数的图象,了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件;会用导数求不超过三次的多项式函数的极大值、极小值,以及在给定区间上不超过三次的多项式函数的最大值、最小值。

(4) 生活中的优化问题举例

例如,通过使利润最大、用料最省、效率最高等优化问题,体会导数在解决实际问题中的作用(参见例 5)。

(5) 数学文化

收集有关微积分创立的时代背景和有关人物的资料,并进行交

流；体会微积分的建立在人类文化发展中的意义和价值。具体要求见本标准中“数学文化”的要求（参见第104页）。

说明与建议

1. 在常用逻辑用语教学中，应特别注意以下几个问题。

(1) 这里考虑的命题是指明确地给出条件和结论的命题，对“命题的逆命题、否命题与逆否命题”只要求作一般性了解，重点关注四种命题的相互关系和命题的必要条件、充分条件、充要条件。

(2) 对逻辑联结词“或”“且”“非”的含义，只要求通过数学实例加以了解，使学生正确地表述相关的数学内容。

(3) 对于量词，重在理解它们的含义，不要追求它们的形式化定义。

(4) 注意引导学生在常用逻辑用语的过程中，掌握常用逻辑用语的用法，纠正出现的逻辑错误，体会运用常用逻辑用语表述数学内容的准确性、简洁性。避免对逻辑用语的机械记忆和抽象解释，不要求使用真值表。

2. 在引入圆锥曲线时，应通过丰富的实例（如行星运行轨道、抛物运动轨迹、探照灯的镜面），使学生了解圆锥曲线的背景与应用。

3. 教师应向学生展示平面截圆锥得到椭圆的过程，使学生加深对圆锥曲线的理解。有条件的学校应充分发挥现代教育技术的作用，利用计算机演示平面截圆锥所得的圆锥曲线（参见例1）。

4. 教师应向学生展现圆锥曲线在实际中的应用，例如，投掷铅球的运行轨迹，卫星的运行轨迹等。

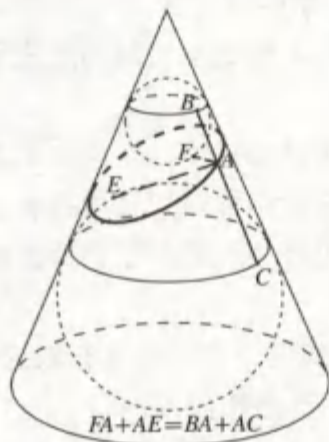
5. 本模块中，导数的概念是通过实际背景和具体应用的实例引入的。教学中，可以通过研究增长率、膨胀率、效率、密度、速度等反映导数应用的实例，引导学生经历由平均变化率到瞬时变化率的过程，知道瞬时变化率就是导数。通过感受导数在研究函数和解决实际问题中的作用，体会导数的思想及其内涵。这样处理的目

是帮助学生直观理解导数的背景、思想和作用。

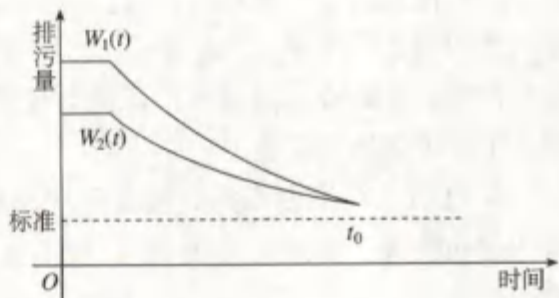
6. 在教学中, 要防止将导数仅仅作为一些规则和步骤来学习, 而忽视它的思想和价值。应使学生认识到, 任何事物的变化率都可以用导数来描述。应当避免过量的形式化运算练习。

参考案例

例 1 如图, 用一个平面去截圆锥, 这个平面与圆锥的交线是一个椭圆。在圆锥内做大小两个球分别与圆锥和截面相切。那么, 截面与两个球的切点恰是椭圆的两个焦点。



例 1 图



例 2 图

例 2 国家环保局在规定的排污达标的日期前, 对甲、乙两家企业进行检查, 其连续检测结果如图所示。试问哪个企业治污效果好 (其中 W 表示治污量)。

在 t_0 处, 虽然 $W_1(t_0) = W_2(t_0)$, 然而 $\frac{W_1(t_0) - W_1(t_0 - \Delta t)}{-\Delta t} \geq \frac{W_2(t_0) - W_2(t_0 - \Delta t)}{-\Delta t}$, 所以说在单位时间里企业甲比企业乙的平均治污率大, 因此企业甲比企业乙略好一筹。

例 3 我们知道, 当运动员从 10 米高台跳水时, 从腾空到进入

水面的过程中，不同时刻的速度是不同的。假设 t 秒后运动员相对地面的高度为： $H(t) = -4.9t^2 + 6.5t + 10$ ，在 2 秒时运动员的速度（瞬时速度）为多少？

该运动员在 2 秒到 2.1 秒（记为 $[2, 2.1]$ ）的平均速度为

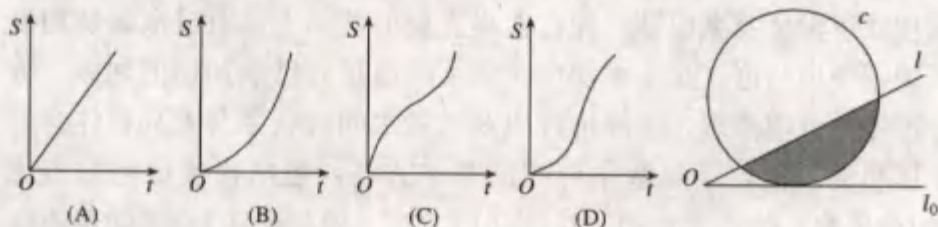
$$\frac{H(2.1) - H(2)}{2.1 - 2} = \frac{2.041 - 3.4}{0.1} = -13.59.$$

同样，可以计算出 $[2, 2.01]$ ， $[2, 2.001]$ ， \dots 的平均速度，也可以计算出 $[1.99, 2]$ ， $[1.999, 2]$ ， \dots 的平均速度。

时间/s	间隔/s	平均速度/ (m/s)	时间/s	间隔/s	平均速度/ (m/s)
$[2, 2.1]$	0.1	-13.59	$[1.9, 2]$	0.1	-12.61
$[2, 2.01]$	0.01	-13.149	$[1.99, 2]$	0.01	-13.051
$[2, 2.001]$	0.001	-13.104 9	$[1.999, 2]$	0.001	-13.095 1
$[2, 2.000 1]$	0.000 1	-13.100 49	$[1.999 9, 2]$	0.000 1	-13.099 51
$[2, 2.000 01]$	0.000 01	-13.100 049	$[1.999 99, 2]$	0.000 01	-13.099 951
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

由此可以看出，当时间间隔越来越小时，平均速度趋于一个常数，这一常数（13.1）就可作为该运动员在 2 秒时的速度。

例 4 如图，直线 l 和圆 c ，当 l 从 l_0 开始在平面上绕点 O 匀速旋转（旋转角度不超过 90° ）时，它扫过的圆内阴影部分的面积 S 是时间 t 的函数，它的图象大致是（ ）。



例 4 图

例 5 有一边长为 a 的正方形铁片，铁片的四角截去四个边长为 x 的小正方形，然后做成一个无盖方盒。

- (1) 试把方盒的容积 V 表示为 x 的函数；
- (2) 求 x 多大时，做成方盒的容积 V 最大。

选修 1-2

在本模块中，学生将学习统计案例、推理与证明、数系扩充及复数的引入、框图。

学生将在必修课程学习统计的基础上，通过对典型案例的讨论，了解和使用一些常用的统计方法，进一步体会运用统计方法解决实际问题的基本思想，认识统计方法在决策中的作用。

“推理与证明”是数学的基本思维过程，也是人们学习和生活中经常使用的思维方式。推理一般包括合情推理和演绎推理。合情推理是根据已有的事实和正确的结论（包括定义、公理、定理等）、实验和实践的结果，以及个人的经验和直觉等推测某些结果的推理过程。归纳、类比是合情推理常用的思维方法。在解决问题的过程中，合情推理具有猜测和发现结论、探索 and 提供思路的作用，有利于创新意识的培养。演绎推理是根据已有的事实和正确的结论（包括定义、公理、定理等），按照严格的逻辑法则得到新结论的推理过程，培养和学生的演绎推理或逻辑证明的能力是高中数学课程的重要目标。合情推理和演绎推理之间联系紧密、相辅相成。证明通常包括逻辑证明和实验、实践证明，数学结论的正确性必须通过演绎推理或逻辑证明来保证，即在前提正确的基础上，通过正确使用推理规则得出结论。在本模块中，学生将通过对已学知识的回顾，进一步体会合情推理、演绎推理以及二者之间的联系与差异；体会数学证明的特点，了解数学证明的基本方法，包括直接证明的方法（如分析法、综合法）和间接证明的方法（如反证法）；感受逻辑证明在数学以及日常生活中的作用，养成言之有理、论证有据的习惯。

数系扩充的过程体现了数学的发现和创造过程，同时体现了数学发生、发展的客观需求，复数的引入是中学阶段数系的又一次扩

充。在本模块中，学生将在问题情境中了解数系扩充的过程以及引入复数的必要性，学习复数的一些基本知识，体会人类理性思维在数系扩充中的作用。

框图是表示一个系统各部分和各环节之间关系的图示，它的作用在于能够清晰地表达比较复杂的系统各部分之间的关系。框图已经广泛应用于算法、计算机程序设计、工序流程的表述、设计方案的比较等方面，也是表示数学计算与证明过程中主要逻辑步骤的工具，并将成为日常生活和各门学科中进行交流的一种常用表达方式。在本模块中，学生将学习用“流程图”“结构图”等刻画数学问题以及其他问题的解决过程；并在学习过程中，体验用框图表示数学问题解决过程以及事物发生、发展过程的优越性，提高抽象概括能力和逻辑思维能力，能清晰地表达和交流思想。

内容与要求

1. 统计案例（约 14 课时）

通过典型案例，学习下列一些常见的统计方法，并能初步应用这些方法解决一些实际问题。

① 通过对典型案例（如“肺癌与吸烟有关吗”等）的探究，了解独立性检验（只要求 2×2 列联表）的基本思想、方法及初步应用。

② 通过对典型案例（如“质量控制”“新药是否有效”等）的探究，了解实际推断原理和假设检验的基本思想、方法及初步应用（参见例 1）。

③ 通过对典型案例（如“昆虫分类”等）的探究，了解聚类分析的基本思想、方法及初步应用。

④ 通过对典型案例（如“人的体重与身高的关系”等）的探究，进一步了解回归的基本思想、方法及初步应用。

2. 推理与证明（约 10 课时）

（1）合情推理与演绎推理

① 结合已学过的数学实例和生活中的实例，了解合情推理的含义，能利用归纳和类比等进行简单的推理，体会并认识合情推理在数学发现中的作用（参见例 2、例 3）。

② 结合已学过的数学实例和生活中的实例，体会演绎推理的重要性，掌握演绎推理的基本方法，并能运用它们进行一些简单推理。

③ 通过具体实例，了解合情推理和演绎推理之间的联系和差异。

(2) 直接证明与间接证明

① 结合已经学过的数学实例，了解直接证明的两种基本方法：分析法和综合法；了解分析法和综合法的思考过程、特点。

② 结合已经学过的数学实例，了解间接证明的一种基本方法——反证法；了解反证法的思考过程、特点。

(3) 数学文化

① 通过对实例的介绍（如欧几里得《几何原本》、马克思《资本论》、杰弗逊《独立宣言》、牛顿三定律），体会公理化思想。

② 介绍计算机在自动推理领域和数学证明中的作用。

3. 数系的扩充与复数的引入（约 4 课时）

(1) 在问题情境中了解数系的扩充过程，体会实际需求与数学内部的矛盾（数的运算规则、方程求根）在数系扩充过程中的作用，感受人类理性思维的作用以及数与现实世界的联系。

(2) 理解复数的基本概念以及复数相等的充要条件。

(3) 了解复数的代数表示法及其几何意义。

(4) 能进行复数代数形式的四则运算，了解复数代数形式的加、减运算的几何意义。

4. 框图（约 6 课时）

(1) 流程图

① 通过具体实例，进一步认识程序框图。

② 通过具体实例，了解工序流程图（即统筹图）（参见例 4、例 5）。

③ 能绘制简单实际问题的流程图，体会流程图在解决实际问题中的作用。

(2) 结构图

① 通过实例，了解结构图；运用结构图梳理已学过的知识、整理收集到的资料信息。

② 结合作出的结构图与他人进行交流，体会结构图在揭示事物联系中的作用。

说明与建议

1. 统计案例的教学中，应鼓励学生经历数据处理的过程，培养他们对数据的直观感觉，认识统计方法的特点（如统计推断可能犯错误，估计结果的随机性），体会统计方法应用的广泛性。应尽量给学生提供一定的实践活动机会，可结合数学建模的活动，选择 1 个案例，要求学生亲自实践。对于统计案例内容，只要求学生了解几种统计方法的基本思想及其初步应用，对于其理论基础不作要求，避免学生单纯记忆和机械套用公式进行计算。

2. 教学中，应鼓励学生使用计算器、计算机等现代技术手段来处理数据，有条件的学校还可运用一些常见的统计软件解决实际问题。

3. 教学中应通过实例，引导学生运用合情推理去探索、猜测一些数学结论，并用演绎推理确认所得结论的正确性，或者用反例推翻错误的猜想。教学的重点在于通过具体实例理解合情推理与演绎推理，而不追求对概念的抽象表述。

4. 本模块中设置的证明内容是对学生已学过的基本证明方法的总结。在教学中，应通过实例，引导学生认识各种证明方法的特点，体会证明的必要性。对证明的技巧性不宜作过高的要求。

5. 框图的教学，应从分析实例入手，引导学生运用框图表示数学计算与证明过程中的主要思路与步骤、实际问题中的工序流程、某一数学知识系统的结构关系等。使学生在运用框图的过程中理解

流程图和结构图的特征，掌握框图的用法，体验用框图表示解决问题过程的优越性。

6. 在复数概念与运算的教学中，应注意避免繁琐的计算与技巧训练。对于感兴趣的学生，可以安排一些引申的内容，如求 $x^3=1$ 的根、介绍代数学基本定理等。

参考案例

例1 某地区羊患某种病的概率是 0.4，且每只羊患病与否是彼此独立的。今研制一种新的预防药，任选 5 只羊做实验，结果这 5 只羊服用此药后均未患病。问此药是否有效。

初看起来，会认为这药一定有效，因为服药的羊均未患病。但细想一下，会有问题，因为大部分羊不服药也不会患病，患病的羊只占 0.4 左右。这 5 只羊都未患病，未必是药的作用。分析这问题的一个自然想法是：若药无效，随机抽取 5 只羊都不患病的可能性大不大。若这件事发生的概率很小，几乎不会发生，那么现在我们这几只羊都未患病，应该是药的效果，即药有效。

现假设药无效，5 只羊都不生病的概率是

$$(1-0.4)^5 \approx 0.078.$$

这个概率很小，该事件几乎不会发生，但现在它确实发生了，说明我们的假设不对，药是有效的。

这里的分析思想有些像反证法，但并不相同。给定假设后，我们发现，一个概率很小几乎不会发生的事件却发生了，从而否定我们的“假设”。

应该指出的是，当我们作出判断“药是有效的”时，是可能犯错误的。犯错误的概率是 0.078。也就是说，我们有近 92% 的把握认为药是有效的。

例2 探求凸多面体的面、顶点、棱之间的数量关系（欧拉公式的发现）。

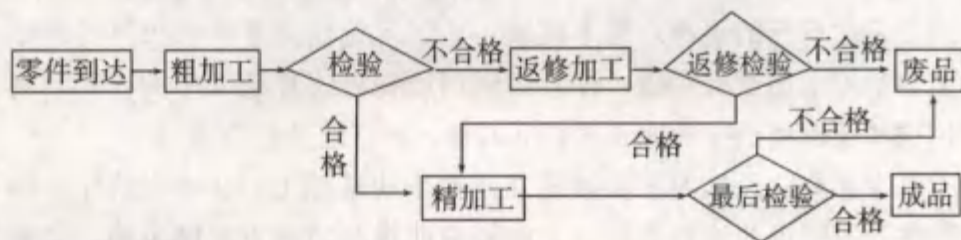
例3 平面上的圆与空间中的球的类比。

平面几何中的概念	立体几何中的类似概念
圆	球
圆的切线	球的切面
圆的弦	球的截面圆
圆周长	球的表面积
圆面积	球的体积

圆的性质	球的性质
圆心与弦（非直径）中点的连线垂直于弦。	球心与截面圆（不经过圆心的小截面圆）圆心的连线垂直于截面圆。
与圆心距离相等的两弦相等；与圆心距离不等的两弦不等，距圆心较近的弦较长。	与球心距离相等的两个截面圆相等；与球心距离不等的两个截面圆不等，距球心较近的截面圆较大。
.....

例 4 零件加工过程的流程图

工厂加工某种零件有三道工序：粗加工、返修加工和精加工。每道工序完成时，都要对产品进行检验。粗加工的合格品进入精加工，不合格品进入返修加工；返修加工合格品进入精加工，不合格品作为废品处理；精加工合格品为成品，不合格品为废品。请用流程图表示这个零件的加工过程。



例 5 数学建模过程的流程图如下。



根据这个流程图，结合一个具体实例，说明数学建模的过程。

系 列 2

选修 2-1

在本模块中，学生将学习常用逻辑用语、圆锥曲线与方程、空间中的向量（简称空间向量）与立体几何。

正确地使用逻辑用语是现代公民应该具备的基本素质。无论是进行思考、交流，还是从事各项工作，都需要正确地运用逻辑用语表达自己的思维。在本模块中，学生将在义务教育阶段的基础上，学习常用逻辑用语，体会逻辑用语在表述和论证中的作用，利用这些逻辑用语准确地表达数学内容，更好地进行交流。

在必修阶段学习平面解析几何初步的基础上，在本模块中，学生将学习圆锥曲线与方程，了解圆锥曲线与二次方程的关系，掌握圆锥曲线的基本几何性质，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实

实际问题中的作用。结合已学过的曲线及其方程的实例，了解曲线与方程的对应关系，进一步体会数形结合的思想。

用空间向量处理立体几何问题，提供了新的视角。空间向量的引入，为解决三维空间中图形的位置关系与度量问题提供了一个十分有效的工具。在本模块中，学生将在学习平面向量的基础上，把平面向量及其运算推广到空间，运用空间向量解决有关直线、平面位置关系的问题，体会向量方法在研究几何图形中的作用，进一步发展空间想像能力和几何直观能力。

内容与要求

1. 常用逻辑用语（约 8 课时）

(1) 命题及其关系

- ① 了解命题的逆命题、否命题与逆否命题。
- ② 理解必要条件、充分条件与充要条件的意义，会分析四种命题的相互关系。

(2) 简单的逻辑联结词

通过数学实例，了解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义。

(3) 全称量词与存在量词

- ① 通过生活和数学中的丰富实例，理解全称量词与存在量词的意义。
- ② 能正确地对含有一个量词的命题进行否定。

2. 圆锥曲线与方程（约 16 课时）

(1) 圆锥曲线

- ① 了解圆锥曲线的实际背景，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用。
- ② 经历从具体情境中抽象出椭圆、抛物线模型的过程，掌握它们的定义、标准方程、几何图形及简单性质。
- ③ 了解双曲线的定义、几何图形和标准方程，知道双曲线的有关性质。

④ 能用坐标法解决一些与圆锥曲线有关的简单几何问题（直线与圆锥曲线的位置关系）和实际问题。

⑤ 通过圆锥曲线的学习，进一步体会数形结合的思想。

(2) 曲线与方程

结合已学过的曲线及其方程的实例，了解曲线与方程的对应关系，进一步感受数形结合的基本思想。

3. 空间向量与立体几何（约 12 课时）

(1) 空间向量及其运算

① 经历向量及其运算由平面向空间推广的过程。

② 了解空间向量的概念，了解空间向量的基本定理及其意义，掌握空间向量的正交分解及其坐标表示。

③ 掌握空间向量的线性运算及其坐标表示。

④ 掌握空间向量的数量积及其坐标表示，能运用向量的数量积判断向量的共线与垂直。

(2) 空间向量的应用

① 理解直线的方向向量与平面的法向量。

② 能用向量语言表述线线、线面、面面的垂直、平行关系。

③ 能用向量方法证明有关线、面位置关系的一些定理（包括三垂线定理）（参见例 1、例 2、例 3）。

④ 能用向量方法解决线线、线面、面面的夹角的计算问题，体会向量方法在研究几何问题中的作用。

说明与建议

1. 在常用逻辑用语教学中，应特别注意以下几个问题。

(1) 这里考虑的命题是指明确地给出条件和结论的命题，对“命题的逆命题、否命题与逆否命题”只要求做一般性了解，重点关注四种命题的相互关系和命题的必要条件、充分条件、充要条件。

(2) 对逻辑联结词“或”“且”“非”的含义，只要求通过数学实例加以了解，帮助学生正确地表述相关的数学内容。

(3) 对于量词，重在理解它们的含义，不要追求它们的形式化定义。

(4) 注意引导学生在使用常用逻辑用语的过程中，掌握常用逻辑用语的用法，纠正出现的逻辑错误，体会运用常用逻辑用语表述数学内容的准确性、简洁性。避免对逻辑用语的机械记忆和抽象解释，不要求使用真值表。

2. 在引入圆锥曲线时，应通过丰富的实例（如行星运行轨道、抛物运动轨迹、探照灯的镜面），使学生了解圆锥曲线的背景与应用。

教师应向学生展示平面截圆锥得到椭圆的过程，使学生加深对圆锥曲线的理解。有条件的学校应充分发挥现代教育技术的作用，利用计算机演示平面截圆锥所得的圆锥曲线（参见选修 1-1 案例中的例 1）。

3. 教师可以向学生展现圆锥曲线在实际中的应用，例如，投掷铅球的运行轨迹、卫星的运行轨迹。

4. 曲线与方程的教学应以学习过的曲线为主，注重使学生体会曲线与方程的对应关系，感受数形结合的基本思想。对于感兴趣的学生，教师也可以引导学生了解圆锥曲线的离心率与统一方程。有条件的学校应充分发挥现代教育技术的作用，通过一些软件向学生演示方程中参数的变化对方程所表示的曲线的影响，使学生进一步理解曲线与方程的关系。

5. 空间向量的教学应引导学生运用类比的方法，经历向量及其运算由平面向空间推广的过程。教学过程中应注意维数增加所带来的影响。

6. 在教学中，可以鼓励学生灵活选择运用向量方法与综合方法，从不同角度解决立体几何问题。

参考案例

例 1 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $\angle BAC=$

30° , $|BC| = 1$, $|AA_1| = \sqrt{6}$, M 是棱 CC_1 的中点, 证明: $AB_1 \perp A_1M$ 。

例 2 已知矩形 $ABCD$ 和矩形 $ADEF$ 垂直, 以 AD 为公共边, 但它们不在同一平面上。点 M, N 分别在对角线 BD, AE 上, 且 $|BM| = \frac{1}{3}|BD|$, $|AN| = \frac{1}{3}|AE|$ 。证明: $MN \parallel$ 平面 CDE 。

例 3 已知单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, E, F 分别是棱 B_1C_1 和 C_1D_1 的中点。试求:

- (1) AD_1 与 EF 所成的角;
- (2) AF 与平面 BEB_1 所成的角;
- (3) 二面角 C_1-DB-B_1 的大小。

选修 2-2

在本模块中, 学生将学习导数及其应用、推理与证明、数系的扩充与复数的引入。

微积分的创立是数学发展中的里程碑, 它的发展和广泛应用开创了向近代数学过渡的新时期, 为研究变量和函数提供了重要的方法和手段。导数概念是微积分的核心概念之一, 它有极其丰富的实际背景和广泛的应用。在本模块中, 学生将通过大量实例, 经历由平均变化率到瞬时变化率刻画现实问题的过程, 理解导数概念, 了解导数在研究函数的单调性、极值等性质中的作用, 初步了解定积分的概念, 为以后进一步学习微积分打下基础。通过该模块的学习, 学生将体会导数的思想及其丰富内涵, 感受导数在解决实际问题中的作用, 了解微积分的文化价值。

“推理与证明”是数学的基本思维过程, 也是人们学习和生活中经常使用的思维方式。推理一般包括合情推理和演绎推理。合情推理是根据已有的事实和正确的结论(包括定义、公理、定理等)、实验和实践的结果, 以及个人的经验和直觉等推测某些结果的推理过

程,归纳、类比是合情推理常用的思维方法。在解决问题的过程中,合情推理具有猜测和发现结论、探索和提供思路的作用,有利于创新意识的培养。演绎推理是根据已有的事实和正确的结论(包括定义、公理、定理等),按照严格的逻辑法则得到新结论的推理过程,培养和提高学生的演绎推理或逻辑证明的能力是高中数学课程的重要目标。合情推理和演绎推理之间联系紧密、相辅相成。证明通常包括逻辑证明和实验、实践证明,数学结论的正确性必须通过逻辑证明来保证,即在前提正确的基础上,通过正确使用推理规则得出结论。在本模块中,学生将通过已学知识的回顾,进一步体会合情推理、演绎推理以及二者之间的联系与差异;体会数学证明的特点,了解数学证明的基本方法,包括直接证明的方法(如分析法、综合法、数学归纳法)和间接证明的方法(如反证法);感受逻辑证明在数学以及日常生活中的作用,养成言之有理、论证有据的习惯。

数系扩充的过程体现了数学的发现和创造过程,同时体现了数学发生发展的客观需求和背景,复数的引入是中学阶段数系的又一次扩充。在本模块中,学生将在问题情境中了解数系扩充的过程以及引入复数的必要性,学习复数的一些基本知识,体会人类理性思维在数系扩充中的作用。

内容与要求

1. 导数及其应用(约 24 课时)

(1) 导数概念及其几何意义

① 通过对大量实例的分析,经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程,了解导数概念的实际背景,知道瞬时变化率就是导数,体会导数的思想及其内涵(参见选修 1-1 案例中的例 2、例 3)。

② 通过函数图象直观地理解导数的几何意义。

(2) 导数的运算

① 能根据导数定义求函数 $y=c$, $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=\frac{1}{x}$,

$y=\sqrt{x}$ 的导数。

② 能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数，能求简单的复合函数（仅限于形如 $f(ax+b)$ ）的导数。

③ 会使用导数公式表。

(3) 导数在研究函数中的应用

① 结合实例，借助几何直观探索并了解函数的单调性与导数的关系（参见选修 1-1 案例中的例 4）；能利用导数研究函数的单调性，会求不超过三次的多项式函数的单调区间。

② 结合函数的图象，了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件；会用导数求不超过三次的多项式函数的极大值、极小值，以及闭区间上不超过三次的多项式函数最大值、最小值；体会导数方法在研究函数性质中的一般性和有效性。

(4) 生活中的优化问题举例。

例如，通过使利润最大、用料最省、效率最高等优化问题，体会导数在解决实际问题中的作用（参见选修 1-1 案例中的例 5）。

(5) 定积分与微积分基本定理

① 通过实例（如求曲边梯形的面积、变力做功等），从问题情境中了解定积分的实际背景；借助几何直观体会定积分的基本思想，初步了解定积分的概念。

② 通过实例（如变速运动物体在某段时间内的速度与路程的关系），直观了解微积分基本定理的含义（参见例 1）。

(6) 数学文化

收集有关微积分创立的时代背景和有关人物的资料，并进行交流；体会微积分的建立在人类文化发展中的意义和价值。具体要求见本标准中“数学文化”的要求（参见第 104 页）。

2. 推理与证明 (约 8 课时)

(1) 合情推理与演绎推理

① 结合已学过的数学实例和生活中的实例,了解合情推理的含义,能利用归纳和类比等进行简单的推理,体会并认识合情推理在数学发现中的作用(参见选修 1-2 案例中的例 2、例 3)。

② 结合已学过的数学实例和生活中的实例,体会演绎推理的重要性,掌握演绎推理的基本模式,并能运用它们进行一些简单推理。

③ 通过具体实例,了解合情推理和演绎推理之间的联系和差异。

(2) 直接证明与间接证明

① 结合已经学过的数学实例,了解直接证明的两种基本方法:分析法和综合法;了解分析法和综合法的思考过程、特点。

② 结合已经学过的数学实例,了解间接证明的一种基本方法——反证法;了解反证法的思考过程、特点。

(3) 数学归纳法

了解数学归纳法的原理,能用数学归纳法证明一些简单的数学命题。

(4) 数学文化

① 通过对实例的介绍(如欧几里得《几何原本》、马克思《资本论》、杰弗逊《独立宣言》、牛顿三定律),体会公理化思想。

② 介绍计算机在自动推理领域和数学证明中的作用。

3. 数系的扩充与复数的引入 (约 4 课时)

(1) 在问题情境中了解数系的扩充过程,体会实际需求与数学内部的矛盾(数的运算规则、方程理论)在数系扩充过程中的作用,感受人类理性思维的作用以及数与现实世界的联系。

(2) 理解复数的基本概念以及复数相等的充要条件。

(3) 了解复数的代数表示法及其几何意义。

(4) 能进行复数代数形式的四则运算,了解复数代数形式的加、

减运算的几何意义。

说明与建议

1. 本模块中,导数的概念是通过实际背景和具体应用的实例引入的。教学中,可以通过研究增长率、膨胀率、效率、密度、速度等反映导数应用的实例,引导学生经历由平均变化率到瞬时变化率的过程,知道瞬时变化率就是导数。通过感受导数在研究函数和解决实际问题中的作用,体会导数的思想及其内涵。这样处理的目的是帮助学生直观理解导数的背景、思想和作用。

2. 在教学中,要防止将导数仅仅作为一些规则和步骤来学习,而忽视它的思想和价值。应使学生认识到,任何事物的变化率都可以用导数来描述。

3. 教师应引导学生在解决具体问题的过程中,将研究函数的导数方法与初等方法作比较,以体会导数方法在研究函数性质中的一般性和有效性。

4. 教学中应通过实例,引导学生运用合情推理去探索、猜测一些数学结论,并用演绎推理确认所得结论的正确性,或者用反例推翻错误的猜想。教学的重点在于通过具体实例理解合情推理与演绎推理,而不追求对概念的抽象表述。

5. 本模块中设置的证明内容是对学生已学过的基本证明方法的总结。在教学中,应通过实例,引导学生认识各种证明方法的特点,体会证明的必要性。对证明的技巧性不宜作过高的要求。

6. 教师应借助具体实例让学生了解数学归纳法的原理,对证明的问题要控制难度。

7. 在复数概念与运算的教学中,应注意避免繁琐的计算与技巧训练。对于感兴趣的学生,可以安排一些引申的内容,如求 $x^3=1$ 的根,介绍代数学基本定理等。

参考案例

例 1 一个物体依照 $s=s(t)$ 规律在直线上运动,我们已经知道,

其在某一时刻 t_0 的运动速度 $v(t_0)$ (即瞬时速度或瞬时变化率) 为 $s=s(t)$ 在 t_0 时刻的导数, 即 $v(t_0)=s'(t_0)$ 。今考虑 $s(t)$ 在 $t=a$ 到 $t=b$ 之间位置的总变化。我们把区间 $a \leq t \leq b$ 分割成 n 个小区间, 不妨假设小区间的长度相等, 其长度为 Δt_i 。对每一个小区间, 我们假设 $s(t)$ 的变化率近似为某一常量, 于是我们可以说

$$\Delta s \approx s(t) \text{ 的变化率} \times \text{时间}。$$

在第一个小区间内, 即从 t_0 到 t_1 , 假设 $s(t)$ 的变化率近似地为 $s'(t_0)$, 于是有

$$\Delta s_0 \approx s'(t_0) \Delta t_0, \quad \Delta t_0 = t_1 - t_0。$$

同样, 对第二个小区间, 即从 t_1 到 t_2 , 假设 $s(t)$ 的变化率近似地为 $s'(t_1)$, 因此有

$$\Delta s_1 \approx s'(t_1) \Delta t_1, \quad \Delta t_1 = t_2 - t_1,$$

等等。把在所有小区间上得到的位置变化近似值全部加在一起, 得到

$$s \text{ 的总变化} = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta s_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} s'(t_i) \Delta t_i。$$

我们可以把 $s(t)$ 在 $t_0=a$ 到 $t_n=b$ 之间位置的总变化写成 $s(b) - s(a)$ 。另一方面, 当分割无限加细、 n 趋于无穷时, 和式

$$\sum_{i=0}^{n-1} s'(t_i) \Delta t = \sum_{i=0}^{n-1} v(t_i) \Delta t$$

的极限就是定积分 $\int_a^b v(t) dt$ 或 $\int_a^b s'(t) dt$, 也就是 $s(t)$ 在 $t=a$ 到 $t=b$ 之间位置的总变化。于是, 我们可得到以下结论:

$$s(b) - s(a) = \int_a^b s'(t) dt = \int_a^b v(t) dt,$$

也就是说, 变化率的定积分给出了总的变化。

特别地, 当物体作匀速运动时, 即 $v(t) \equiv v$ 时,

$$s(b) - s(a) = v(b-a) = \int_a^b v dt。$$

当物体作匀加速运动时, 即 $v(t) = at$ (其中 a 是常数) 时,

$$s(b) - s(a) = \frac{1}{2}a(b^2 - a^2) = \int_a^b at \, dt.$$

一般地, 如果 $f(t)$ 是连续函数, 并且 $f(t) = F'(t)$, 那么

$$\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a).$$

这就是微积分基本定理。这里给出的并不是非常严格的证明, 但是, 它反映了微积分基本定理的基本思想, 反映了微分 (导数) 与积分的联系。

选修 2-3

在本模块中, 学生将学习计数原理、统计案例、概率。

计数问题是数学中的重要研究对象之一, 分类加法计数原理、分步乘法计数原理是解决计数问题的最基本、最重要的方法, 也称为基本计数原理, 它们为解决很多实际问题提供了思想和工具。在本模块中, 学生将学习计数基本原理、排列、组合、二项式定理及其应用, 了解计数与现实生活的联系, 会解决简单的计数问题。

学生将在必修课程学习概率的基础上, 学习某些离散型随机变量分布列及其均值、方差等内容, 初步学会利用离散型随机变量思想描述和分析某些随机现象的方法, 并能用所学知识解决一些简单的实际问题, 进一步体会概率模型的作用及运用概率思考问题的特点, 初步形成用随机观念观察、分析问题的意识。

学生将在必修课程学习统计的基础上, 通过对典型案例的讨论, 了解和使用一些常用的统计方法, 进一步体会运用统计方法解决实际问题的基本思想, 认识统计方法在决策中的作用。

内容与要求

1. 计数原理 (约 14 课时)

(1) 分类加法计数原理、分步乘法计数原理

通过实例，总结出分类加法计数原理、分步乘法计数原理；能根据具体问题的特征，选择分类加法计数原理或分步乘法计数原理解决一些简单的实际问题。

(2) 排列与组合

通过实例，理解排列、组合的概念；能利用计数原理推导排列数公式、组合数公式，并能解决简单的实际问题。

(3) 二项式定理

能用计数原理证明二项式定理（参见例1）；会用二项式定理解决与二项展开式有关的简单问题。

2. 统计与概率（约 22 课时）

(1) 概率

① 在对具体问题的分析中，理解取有限值的离散型随机变量及其分布列的概念，认识分布列对于刻画随机现象的重要性。

② 通过实例（如彩票抽奖），理解超几何分布及其导出过程，并能进行简单的应用（参见例2）。

③ 在具体情境中，了解条件概率和两个事件相互独立的概念，理解 n 次独立重复试验的模型及二项分布，并能解决一些简单的实际问题（参见例3）。

④ 通过实例，理解取有限值的离散型随机变量均值、方差的概念，能计算简单离散型随机变量的均值、方差，并能解决一些实际问题（参见例4）。

⑤ 通过实际问题，借助直观（如实际问题的直方图），认识正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义。

(2) 统计案例

通过典型案例，学习下列一些常见的统计方法，并能初步应用这些方法解决一些实际问题。

① 通过对典型案例（如“肺癌与吸烟有关吗”等）的探究，了解独立性检验（只要求 2×2 列联表）的基本思想、方法及初步应用。

② 通过对典型案例（如“质量控制”“新药是否有效”等）的探究，了解实际推断原理和假设检验的基本思想、方法及初步应用（参见选修 1-2 案例中的例 1）。

③ 通过对典型案例（如“昆虫分类”等）的探究，了解聚类分析的基本思想、方法及其初步应用。

④ 通过对典型案例（如“人的体重与身高的关系”等）的探究，了解回归的基本思想、方法及其初步应用。

说明与建议

1. 分类加法计数和分步乘法计数是处理计数问题的两种基本思想方法。教学中，应引导学生根据计数原理分析、处理问题，而不应机械地套用公式。同时，在这部分教学中，应避免繁琐的、技巧性过高的计数问题。

2. 研究一个随机现象，就是要了解它所有可能出现的结果和每一个结果出现的概率，分布列正是描述了离散型随机变量取值的概率规律，二项分布和超几何分布是两个应用广泛的概率模型，要求通过实例引入这两个概率模型，不追求形式化的描述。教学中，应引导学生利用所学知识解决一些实际问题。

3. 统计案例的教学中，应鼓励学生经历数据处理的过程，培养他们对数据的直观感觉，认识统计方法的特点（如统计推断可能犯错误，估计结果的随机性），体会统计方法应用的广泛性。应尽量给学生提供一定的实践活动机会，可结合数学建模的活动，选择一个案例，要求学生亲自实践。对于统计案例内容，只要求学生了解几种统计方法的基本思想及其初步应用，对于其理论基础不做要求，避免学生单纯记忆和机械套用公式进行计算。

4. 教学中，应鼓励学生使用计算器、计算机等现代技术手段来处理数据，有条件的学校还可运用一些常见的统计软件解决实际问题。

5. 可以在二项式定理中介绍我国古代数学成就“杨辉三角”，

在统计案例中介绍所学统计方法在社会生活中的广泛应用，以丰富学生对数学文化价值的认识。

参考案例

例1 二项式定理的证明。

$(a+b)^n$ 是 n 个 $(a+b)$ 相乘，每个 $(a+b)$ 在相乘时，有两种选择，选 a 或 b ，由分步计数原理可知展开式共有 2^n 项（包括同类项），其中每一项都是 $a^k b^{n-k}$ 的形式， $k=0, 1, \dots, n$ ；对于每一项 $a^k b^{n-k}$ ，它是由 k 个 $(a+b)$ 选了 a ， $n-k$ 个 $(a+b)$ 选了 b 得到的，它出现的次数相当于从 n 个 $(a+b)$ 中取 k 个 a 的组合数 C_n^k ，将它们合并同类项，就得二项展开式，这就是二项式定理。

例2 高三（1）班的联欢会上设计了一项游戏。在一个口袋中装有 10 个红球，20 个白球，这些球除颜色外完全相同。游戏者一次从中摸出 5 个球，摸到 4 个红球的就中一等奖。求获一等奖的概率。

从 30 个球中摸出 5 个球的组合数为： $C_{30}^5=142\ 506$ ；那么，

$$P(\text{一等奖}) = \frac{C_{10}^4 C_{20}^{5-4}}{C_{30}^5} = \frac{4\ 200}{142\ 506} \approx 0.029.$$

如果令 X 表示摸出红球的个数，则 X 服从 $N=30, M=5, n=10, m=4$ 的超几何分布，那么

$$P(X=m) = \frac{C_n^m C_{N-n}^{M-m}}{C_N^M}.$$

例3 将一枚均匀硬币随机掷 100 次，相当于重复做了 100 次试验，每次有两个可能的结果（出现正面，不出现正面），出现正面的概率为 $\frac{1}{2}$ 。

如果令 X 为硬币正面出现的次数，则 X 服从 $n=100, p=\frac{1}{2}$ 的二项分布，那么 $P(X=k) = C_{100}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1-\frac{1}{2}\right)^{100-k} = C_{100}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$ 。

由此可以得到：“随机掷 100 次硬币正好出现 50 次正面”的概率为 $P(X=50) = C_{100}^{50} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \approx 0.08$ 。

学生在学习概率时会有一种误解，认为既然出现正面的概率为 $\frac{1}{2}$ ，那么掷 100 次硬币出现 50 次正面是必然的，或者这个事件发生的概率应该很大。但计算表明这概率只有 8% 左右。

例 4 据气象预报，某地区下个月有小洪水的概率为 0.25，有大洪水的概率为 0.01。设工地上有一台大型设备，为保护设备有以下三种方案。

方案 1：运走设备，此时需花费 3 800 元。

方案 2：建一保护围墙，需花费 2 000 元。但围墙无法防止大洪水，当大洪水来临，设备受损，损失费为 60 000 元。

方案 3：不采取措施，希望不发生洪水。此时大洪水来临损失 60 000 元，小洪水来临损失 10 000 元。

试比较哪一种方案好。

系列 3，系列 4 说明

系列 3，系列 4 分别由若干专题组成，每个专题 1 学分。

系列 3 包括数学史选讲、信息安全与密码、球面上的几何、对称与群、欧拉公式与闭曲面分类、三等分角与数域扩充等 6 个专题。系列 4 包括几何证明选讲、矩阵与变换、数列与差分、坐标系与参数方程、不等式选讲、初等数论初步、优选法与试验设计初步、统筹法与图论初步、风险与决策、开关电路与布尔代数等 10 个专题。

系列 3，系列 4 的素材比较丰富，随着课程的发展，这些内容将进一步拓展、丰富和完善。

系列 3，系列 4 所涉及的内容都是基础性的数学内容，不仅应鼓励那些希望在理工、经济等方面发展的学生积极选修，同时也应鼓

励那些希望在人文、社会科学方面发展的学生选修这些课程。

系列3和系列4是为对数学有兴趣和希望进一步提高数学素养的学生而设置的，所涉及的内容都是数学的基础性内容，反映了某些重要的数学思想。有些专题是中学课程某些内容的延伸，有些专题是通过典型实例介绍数学的一些应用方法。这些专题的学习有利于学生的终身发展，有利于扩展学生的数学视野，有利于提高学生对科学的科学价值、应用价值、文化价值的认识，有助于学生进一步打好数学基础，提高应用意识。

专题力求深入浅出、通俗易懂，进一步提高学生分析和解决问题的能力，让学生掌握和体会一些重要的概念、结论和思想方法，体会数学的作用，发展应用意识。

对于系列3，系列4的学习，应提倡多样化的学习方式，可以是教师讲授，也可以是在教师指导下学生的自主探索和合作交流，还应鼓励学生独立阅读、写专题总结报告等，力求使学生切身体会“做数学”是学好数学的有效途径，独立思考是“做数学”的基础。

系列3，系列4的评价方式是不同的，根据系列3内容的特点，对学习这部分内容的评价适宜采用定量与定性相结合的方式。

系 列 3

数学史选讲

内容与要求

通过生动、丰富的事例，了解数学发展过程中若干重要事件、重要人物与重要成果，初步了解数学产生与发展的过程，体会数学对人类文明发展的作用，提高学习数学的兴趣，加深对数学的理解，感受数学家的严谨态度和锲而不舍的探索精神。

完成一个学习总结报告。对数学发展的历史轨迹、自己感兴趣的历史事件与人物，写出自己的研究报告。

本专题由若干个选题组成，内容应反映数学发展的不同时代的特点，要讲史实，更重要的是通过史实介绍数学的思想方法，选题的个数以不少于6个为宜。以下专题可供选择。

1. 早期算术与几何——计数与测量

- ◆ 纸草书中记录的数学（古代埃及）。
- ◆ 泥板书中记录的数学（两河流域）。
- ◆ 中国《周髀算经》、勾股定理（赵爽的图）。
- ◆ 十进位值制的发展。

2. 古希腊数学

◆ 毕达哥拉斯多边形数，从勾股定理到勾股数，不可公度问题。
◆ 欧几里得与《几何原本》，演绎逻辑系统，第五公设问题，尺规作图，公理化思想对近代科学的深远影响。

- ◆ 阿基米德的工作：求积法。

3. 中国古代数学瑰宝

- ◆ 《九章算术》中的数学（方程术、加减消元法、正负数）。
- ◆ 大衍求一术（孙子定理）。
- ◆ 中国古代数学家介绍。

4. 平面解析几何的产生——数与形的结合

- ◆ 函数与曲线。
- ◆ 笛卡儿方法论的意义。

5. 微积分的产生——划时代的成就

6. 近代数学两巨星——欧拉与高斯

- ◆ 欧拉的数学直觉。
- ◆ 高斯时代的特点（数学严密化）。

7. 千古谜题——伽罗瓦的解答

- ◆ 从阿贝尔到伽罗瓦（一个中学生数学家）。
- ◆ 几何作图三大难题。
- ◆ 近世代数的产生。

8. 康托的集合论——对无限的思考

◆ 无限集合与势。

◆ 罗素悖论与数学基础（哥德尔不完备定理）。

9. 随机思想的发展

◆ 概率论溯源。

◆ 近代统计学的缘起。

10. 算法思想的历程

◆ 算法的历史背景。

◆ 计算机科学中的算法。

11. 中国现代数学的发展

◆ 现代中国数学家奋发拼搏，赶超世界数学先进水平的光辉历程。

说明与建议

1. 本专题不必追求数学发展历史的系统性和完整性，通过学生生动活泼的语言与喜闻乐见的事例呈现内容，使学生体会数学的重要思想和发展轨迹。本专题的内容安排可以采取多种形式，既可以由古到今，追寻数学发展的历史；也可以从现实的、学生熟悉的数学问题出发，追根溯源，回眸数学发展中的重要事件和人物。例如，可以从“我们现在有多少种记数方法”出发，追溯历史上的记数法（巴比伦的60进制、英国的12进制、计算机的二进制以及10进制，二进制与中国的八卦）。又如，可以从学生熟悉的 π 入手，漫谈祖冲之的成果，用随机数方法计算 π ，介绍古希腊和中国古代如何对待无理数、目前计算机可以算 π 到小数点后多少位等问题。

2. 以上所提供的内容仅仅是一种选择，本专题内容的安排可以根据具体情况，作适当调整。内容应突出所蕴涵的思想性，突出数学发展的轨迹，突出数学家刻苦钻研的科学精神。内容的选择要符合学生的接受水平，呈现方式应图文并茂、丰富多彩，引起学生的兴趣。

3. 教学方式应灵活多样,可采取讲故事、讨论交流、查阅资料、撰写报告等方式进行。教师应鼓励学生对数学发展的历史轨迹、自己感兴趣的历史事件与人物,写出自己的研究报告。

信息安全与密码

数论和代数在现代信息理论、信息安全中有许多重要的应用。本专题将介绍和学习初等数论的某些知识(如整除与同余),以及数论在现代信息安全中的某些重要应用,使学生了解数学在信息科学中的应用,提高对数学的鉴赏力和学习数学的兴趣。

内容与要求

1. 初等数论的有关知识

(1) 了解整除和同余,模 m 的完全同余系和简化剩余系,欧拉定理和费马小定理,大数分解问题。

(2) 了解欧拉函数的定义和计算公式,威尔逊定理及在素数判别中的应用,原根与指数,模 p 的原根存在性,离散对数问题。

2. 数论在信息安全中的应用

(1) 了解通讯安全中的有关概念(如明文、密文、密钥)和通讯安全中的基本问题(如保密、数字签名、密钥管理、分配和共享)。

(2) 了解古典密码的一个例子:流密码(利用模 m 同余方式)。

(3) 理解公钥体制(单向函数概念),以及加密和数字签名的方法(基于大数分解的 RSA 方案)。

(4) 理解离散对数在密钥交换和分配中的应用——棣弗-赫尔曼(Diffi-Hellman)方案。

(5) 理解离散对数在加密和数字签名中的应用——盖莫尔(El Gamal)算法。

(6) 了解拉格朗日插值公式在密钥共享中的应用。

3. 完成一个学习总结报告

报告应包括两方面的内容：(1) 知识的总结。对信息安全有关内容的理解和认识，体会数学（数论和代数学）在信息安全中的作用。(2) 拓展。通过查阅课外资料，对某些内容和应用进行进一步探讨和思考。

说明与建议

1. 本专题的教材编写与教学应力求深入浅出。教学时，教师应注意介绍相关内容（如通信技术的发展等）的历史与背景，帮助学生理解信息安全中需要解决的问题以及如何利用公钥体制解决这些问题，体会大数分解和离散对数等思想方法在现代信息安全中所起的作用。

2. 在条件允许的情况下，教师应引导学生利用计算机对下列问题进行思考，编制程序、上机实验。

- (1) 用辗转相除计算最大公约数；
- (2) 解同余方程 $ax \equiv b \pmod{m}$ ；
- (3) 判断大整数是否为素数（用 Wilson 定理）；
- (4) 大数分解。

球面上的几何

我们生活在地球上，地球表面十分接近于一个球面。因此，在实际生活中，球面上的几何（简称球面几何）知识有着广泛的实际应用。例如，大地（天体）测量、航空、卫星定位等方面均需利用球面几何的知识。在理论上，球面几何是一个与欧氏平面几何不同的几何模型，是一个重要非欧几何的数学模型，球面几何在几何学的理论研究方面，具有特殊的作用。

本专题将使学生了解一个新的数学模型——球面几何，初步学习球面几何的一些基本知识及其在实际中的一些应用，通过比较球面几何和欧氏平面几何的差异和联系，感受自然界中存在着丰富多彩的数学模型。类比是学习这个专题所用到的重要的思想方法，空

问想像和几何直观能力是学好这个专题的关键。

内容与要求

1. 通过丰富的实际问题（如测量、航空、卫星定位），体会引入球面几何知识的必要性。

2. 通过球面图形与平面图形的比较，感受球面几何与欧氏平面几何的异同。例如，球面上的大圆相当于平面上的直线，球面上两点之间的最短距离是大圆弧的劣弧部分，球幂定理。

3. 通过对实例的分析，体会球面具有类似平面的对称性质。

4. 了解球面上的一些基本图形：大圆、小圆、球面角、球面二角形（月形）、极与赤道、球面三角形、球面三角形的极对称三角形（简称球极三角形）。

5. 通过球面几何与欧氏平面几何比较，探索欧氏平面图形的哪些性质能推广到球面上，并说明理由，由此理解球面三角形的全等定理 $s. s. s$, $s. a. s$, $a. s. a$ 。

6. 理解单位球面三角形的面积公式 $(S=A+B+C-\pi)$ ，由此体会球面三角形内角和大于 180° 。

7. 了解球面三角形全等的 $a. a. a$ 定理。

8. 利用球面三角形面积公式证明欧拉公式，体验球面几何与拓扑学的关系。

9. 利用向量的叉乘（向量积）探索并证明球面余弦定理 $(\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C)$ 和球面上的勾股定理（即当 $C = \frac{\pi}{2}$ 时的球面余弦定理），能从球面的余弦定理推导出球面的正弦定理

$$\left(\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}\right)。$$

10. 体会当球面半径无限增大时，球面接近于平面，球面的三角公式就变成相应的平面三角公式。

11. 初步了解另一种非欧几何模型——庞加莱模型。

12. 完成一个学习总结报告。报告应包括三方面的内容：(1) 知识的总结。对本专题整体结构和内容的理解，说明球面几何与平面几何中哪些公式（定理）是相同的，哪些公式有本质差异；说明为什么相对于半径来说很小的一小片球面可以作为一个平面来对待。(2) 通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考，进一步思考几何与现实空间的关系。(3) 学习球面几何的感受、体会。

说明与建议

1. 本专题的重点是培养学生空间想像和几何直观能力。
2. 教学中应使学生切实地感受利用球面几何知识可以解决（或解释）生活或生产中的一些实际问题。在介绍球面几何时，让学生通过欧氏平面几何和球面几何的类比，得到球面几何的相关结论，促使学生思考平面几何模型与球面几何等非欧几何模型的差异。
3. 介绍球面几何与欧拉公式，主要是为了开拓学生的数学视野，使学生了解一些非欧几何模型，对学生掌握现代数学思想方法有很大帮助。
4. 球面几何涉及到大量的空间图形的对称性（变换），在条件允许的学校，教学中可以充分利用（CAI）多媒体技术。

对 称 与 群

对称是自然界一种十分重要的性质，像轴对称、中心对称。群是刻画对称性的数学概念，群论是现代数学的重要研究对象。

学生将从丰富的平面图形对称变换的实例入手，了解变换群的概念，学习群的表达方法，学会求出一些比较简单的几何图形的对称群，并进一步体会群在研究事物对称性质和研究其他数学对象中的重要作用。

内容与要求

1. 通过丰富的对称图形，感受日常生活和现实世界中存在着大量对称现象。

2. 了解刚体运动的基本性质。
3. 通过分析图形的不同对称性和刚体运动，寻求刻画不同图形对称性的思想，逐步形成图形对称变换的概念。
4. 结合简单的具体图形，找出其所有对称变换。
5. 结合具体的图形实例，逐步形成对称变换合成的概念，理解对称变换合成的封闭性。
6. 结合具体的图形实例，通过操作认识对称变换满足结合律。
7. 结合具体的图形实例，通过操作，理解恒等变换的概念，逆变换的概念及其性质，针对具体的图形能找出一个对称变换的逆变换。
8. 通过具体实例，建立变换群的概念，并初步了解抽象群的概念。
9. 能借助几何直观求出一些几何图形和具有一定对称性的简单化学分子模型的对称群。
10. 通过具体实例，了解一种群的表示方法——乘法表法。
11. 从具体的实例入手，了解一种由较为简单群构造出较为复杂群的方法——直积。
12. 了解群论在现实生活中的重要应用，如晶体分类定理。
13. 考察其他形式的对称变换，如代数式。通过二次、三次方程的求解过程，了解代数方程根的对称群的含义，并了解伽罗瓦利用群论方法解决方程根式解问题的科学史实，感受群论在现代数学中的重大作用。
14. 完成一个学习总结报告。报告应包括三方面的内容：(1) 知识的总结。对本专题整体结构和内容的理解，对对称的数学描述和群的概念的认识。(2) 拓展。通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考，进一步探讨对称在自然界中的广泛性和群对刻画对称的作用。(3) 学习本专题的感受、体会。

说明与建议

1. 由于对称变换、变换的合成（乘法）运算等概念是比较抽象的概念，因此学习过程都应从具体的实例和恰当的情境引入，而不能从抽象的定义出发。

2. 对于中学生来说，群是一个全新的学习对象。对称变换群是把对称变换作为一个运算系统来研究，与过去所学习的数与代数式的运算系统有很大的区别。因此本专题只能以比较简单的具体的群为例。教学的重点在于使学生了解群在刻画对称性中的作用，而尽量避免论述群的抽象定义和性质。同时要求学生能通过具体的几何图形的分析，学会求出一些简单几何图形的对称群，在操作实践过程中感受群的含义。

3. 晶体分类与方程的伽罗瓦理论是群论的两项重大应用成果，在本单元不能详细证明晶体分类定理和方程的伽罗瓦定理，但向学生介绍这两项成果可以使学生感受现代数学的研究方法和特点，因此做好这种介绍性工作也是本单元的教学目标之一。

欧拉公式与闭曲面分类

使用变换对几何图形进行分类，是几何学的重要内容，揭示在不同变换下几何图形的不变性质或不变量是研究这类问题的基本思想方法。本专题主要讨论欧拉公式和欧拉示性数等重要的拓扑不变量，并利用它们对曲线、曲面进行分类。

内容与要求

1. 复习已学过的变换，并使用它们对平面图形分类

(1) 复习平移、旋转、平面运动、反射、全等、位似、伸缩、相似变换，以及对平面图形分类。

(2) 在上述变换下，探索什么几何性质是不变的。

(3) 体会变换的一些基本特征：1—1 对应，连续。

2. 欧拉公式

- (1) 通过探索发现欧拉公式的过程，理解欧拉公式。
- (2) 理解欧拉公式的拓扑证明。
- (3) 使用欧拉公式解决一些问题（如探索正多面体的个数）。
- (4) 探索非欧拉多面形的面数、棱数、顶点数的关系。
3. 理解曲面三角剖分的概念。
4. 会对一些曲面进行三角剖分，并能计算它们的欧拉示性数。
5. 了解拓扑变换的直观含义。
6. 知道一些拓扑不变量，并能用它们对一些曲线、闭曲面进行分类，了解一些曲线、闭曲面的分类结果。
7. 了解拓扑思想的一些应用（如平面布线问题、一笔画问题、布劳威尔不动点定理与经济稳定点问题、四色问题）。
8. 完成一个学习总结报告。报告应包括三方面的内容：（1）知识的总结。本专题整体结构和内容的理解，以及对数学变换思想的认识。（2）拓展。通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考，进一步理解变换的不变量和曲面分类的思想。（3）学习本专题的感受、体会。

说明与建议

1. 这部分内容比较抽象，首先要复习中学阶段学过的几何变换以及分析在这些变换下不变的几何性质，并由此体会变换和变换不变量的思想。

2. 引导学生探索发现欧拉公式的过程，以及对欧拉公式证明的理解，帮助学生体会数学家的创造性工作，这是一个非常好的范例。

3. 三角剖分是研究图形拓扑性质的重要思想方法，引导学生经历对具体曲面使用三角剖分的方法研究其性质的过程，使学生通过操作和实践学习和掌握三角剖分的思想方法。

4. 拓扑变换是一个非常抽象的概念，应该关注学生对拓扑变换形象和直观的理解，例如，把拓扑变换理解为橡皮变换，不要引导

学生追求拓扑变换形式化的定义。

5. 在介绍拓扑学应用时，应注重对拓扑思想方法的介绍，不追求严格化的叙述。

三等分角与数域扩充

三等分角问题、倍方问题和化圆为方问题被称为古希腊的三大几何作图问题。解决这类问题的思想方法不仅在数学上，而且在人类的思想史上都具有重大意义。

本专题将通过三等分角问题的讨论使学生了解解决这类问题的基本思想方法，并能用此方法解决倍方问题和仅用圆规直尺不能作正七边形的问题。另外还介绍用代数方法讨论正十七边形是可作图的（即可用尺规作图方法作出正十七边形）。通过以上的讨论，使学生体会和理解其中蕴涵的数学思想方法，提高分析和解决数学问题的能力。

内容与要求

1. 了解古希腊三大几何作图问题，通过三等分角问题了解它们的正确提法。在不限于圆规和直尺的前提下，了解三等分角的几种不同作法。

2. 理解解决三等分角问题的基本思路——刻画尺规作图的范围。

3. 给定线段 a ， b ，会用尺规作图方法作出长为 $a + b$ ， $a - b$ ， ab ， $\frac{a}{b}$ 的线段。

4. 对于给定的任何已知线段，若把它作为单位长，则任一（正）有理数是可作图的（即仅用圆规和直尺可作出该有理数长的线段）。

5. 通过有理数对加、减、乘、除运算的封闭性，了解有理数域和一般数域的概念。

6. 设 F 是一数域, $k \in F$ 且 $\sqrt{k} \notin F$. 证明: 集合 $\{a+b\sqrt{k}, a, b \in F\}$ 也是一个数域, 且 F 是集合 $\{a+b\sqrt{k}, a, b \in F\}$ 的子集合. 了解扩域的概念.

7. 给出一些数域、扩域的具体实例.

8. 给定长为 a 的线段, 会用尺规作图方法作出长为 \sqrt{a} 的线段.

9. 学会把三等分角问题代数化.

10. 证明: 不能用尺规作图的方法三等分 60° 角.

11. 用上述方法讨论“倍方问题”或“用圆规和直尺不可能作出正七边形”.

12. 体会解决古希腊三大作图问题的思想方法和它在人们思想认识上的作用.

13. 了解复数乘法的棣莫弗公式, 会用代数方法讨论正十七边形是可作图的 (即可用尺规作图方法作出正十七边形).

14. 完成一个学习总结报告. 报告应包括三方面的内容: (1) 知识的总结. 解决三等分角问题的基本思路, 清楚地表述证明的过程. 体会和理解其中蕴涵的数学思想方法. (2) 拓展. 通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考, 进一步体会几何问题代数化的方法和处理几何作图问题的思想. (3) 学习本专题的感受、体会.

说明与建议

1. 本专题在思想上和证明的论述上的要求都是比较高的. 要求学生学会把握解决问题的整体思路, 还要求学生在证明时, 层次分明, 条理清楚. 培养学生表达和论述的能力.

2. 在教学过程中, 教师应该引导学生对某些问题进行探索.

3. 通过本专题的学习, 让学生认识到数学的作用不限于解决问题, 在形成人类正确的思想方法和世界观方面数学同样发挥着重要的作用.

系列 4

几何证明选讲

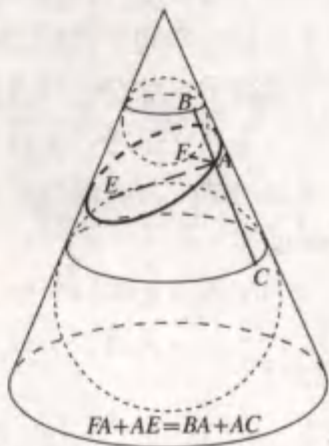
几何证明选讲有助于培养学生的逻辑推理能力，在几何证明的过程中，不仅是逻辑演绎的程序，它还包含着大量的观察、探索、发现的创造性过程。本专题从复习相似图形的性质入手，证明一些反映圆与直线关系的重要定理，并通过对圆锥曲线性质的进一步探索，提高学生空间想像能力、几何直观能力和运用综合几何方法解决问题的能力。

内容与要求

1. 复习相似三角形的定义与性质，了解平行截割定理，证明直角三角形射影定理。
2. 证明圆周角定理、圆的切线的判定定理及性质定理。
3. 证明相交弦定理、圆内接四边形的性质定理与判定定理、切割线定理。
4. 了解平行投影的含义，通过圆柱与平面的位置关系，体会平行投影；证明平面与圆柱面的截线是椭圆（特殊情形是圆）。
5. 通过观察平面截圆锥面的情境，体会下面定理：

定理 在空间中，取直线 l 为轴，直线 l' 与 l 相交于 O 点，其夹角为 α ， l' 围绕 l 旋转得到以 O 为顶点， l' 为母线的圆锥面，任取平面 π ，若它与轴 l 交角为 β (π 与 l 平行，记 $\beta=0$)，则：

- (1) $\beta > \alpha$ ，平面 π 与圆锥的交线为椭圆；
- (2) $\beta = \alpha$ ，平面 π 与圆锥的交线为抛物线；



(3) $\beta < \alpha$, 平面 π 与圆锥的交线为双曲线。

6. 利用 Dandelin 双球 (这两个球位于圆锥的内部, 一个位于平面 π 的上方, 一个位于平面 π 的下方, 并且与平面 π 及圆锥均相切) 证明上述定理 (1) 情况。

7. 试证明以下结果: ① 在 6 中, 一个 Dandelin 球与圆锥面的交线为一个圆, 并与圆锥的底面平行, 记这个圆所在平面为 π' ; ② 如果平面 π 与平面 π' 的交线为 m , 在 5 (1) 中椭圆上任取一点 A , 该 Dandelin 球与平面 π 的切点为 F , 则点 A 到点 F 的距离与点 A 到直线 m 的距离比是小于 1 的常数 e 。(称点 F 为这个椭圆的焦点, 直线 m 为椭圆的准线, 常数 e 为离心率。)

8. 探索定理中 (3) 的证明, 体会当 β 无限接近 α 时平面 π 的极限结果。

9. 完成一个学习总结报告。报告应包括三方面的内容: (1) 知识的总结。对本专题整体结构和内容的理解, 对数学证明的认识。(2) 拓展。通过查阅资料、独立思考, 对某些内容和应用进行进一步探讨。(3) 学习本专题的感受、体会。

说明与建议

本专题的编写与教学, 都应力求深入浅出。对内容与要求 6、7 的两个命题证明过程中, 蕴涵着丰富的数学思想方法, 它们有助于学生体会空间想像能力和几何直观能力在解决问题中的作用, 有助于提高学生综合运用几何知识解决问题的能力。教学时, 教师应鼓励学生独立思考, 主动尝试、探索, 必要时给予适当的指导, 并应鼓励学生写出课题报告, 尽可能清晰地表达自己的思考过程与论证过程。

在条件允许的学校, 教师可以利用现代计算机技术, 动态地展现 Dandelin 两球的方法, 帮助学生利用几何直观进行思维。

矩阵与变换

矩阵是研究图形（向量）变换的基本工具，有着广泛的应用，许多数学模型都可以用矩阵来表示。

本专题将通过平面图形的变换讨论二阶方阵的乘法及性质、逆矩阵和矩阵的特征向量等概念，并以变换和映射的观点理解解线性方程组的意义，初步展示矩阵应用的广泛性。

内容与要求

1. 引入二阶矩阵

2. 二阶矩阵与平面向量（列向量）的乘法、平面图形的变换

(1) 以映射和变换的观点认识矩阵与向量乘法的意义。

(2) 证明矩阵变换把平面上的直线变成直线（或点），即证明

$$A(\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta) = \lambda_1 A\alpha + \lambda_2 A\beta.$$

(3) 通过大量具体的矩阵对平面上给定图形（如正方形）的变换，认识到矩阵可表示如下的线性变换：恒等、反射、伸压、旋转、切变、投影。

3. 变换的复合——二阶方阵的乘法

(1) 通过变换的实例，了解矩阵与矩阵的乘法的意义。

(2) 通过具体的几何图形变换，说明矩阵乘法不满足交换律。

(3) 验证二阶方阵乘法满足结合律。

(4) 通过具体的几何图形变换，说明乘法不满足消去律。

4. 逆矩阵与二阶行列式

(1) 通过具体图形变换，理解逆矩阵的意义；通过具体的投影变换，说明逆矩阵可能不存在。

(2) 会证明逆矩阵的唯一性和 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 等简单性质，并了解其在变换中的意义。

(3) 了解二阶行列式的定义，会用二阶行列式求逆矩阵。

5. 二阶矩阵与二元一次方程组

- (1) 能用变换与映射的观点认识解线性方程组的意义。
- (2) 会用系数矩阵的逆矩阵解方程组。
- (3) 会通过具体的系数矩阵，从几何上说明线性方程组解的存在性，唯一性。

6. 变换的不变量

(1) 掌握矩阵特征值与特征向量的定义，能从几何变换的角度说明特征向量的意义。

(2) 会求二阶方阵的特征值与特征向量（只要求特征值是两个不同实数的情形）。

7. 矩阵的应用

(1) 利用矩阵 A 的特征值、特征向量给出 $A^n \alpha$ 简单的表示，并能用它来解决问题。

(2) 初步了解三阶或高阶矩阵。

(3) 了解矩阵的应用。

8. 完成一个学习总结报告。报告应包括三方面的内容：(1) 知识的总结。理解本专题的整体思路、结构和内容，进一步认识变换的思想。(2) 拓展。通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考，对矩阵变换及其应用做进一步探讨。(3) 学习本专题的感受、体会。

说明与建议

1. 本专题只对具体的二阶方阵加以讨论，而不讨论一般 $m \times n$ 阶矩阵以及 (a_{ij}) 形式的表示。

2. 矩阵的引入要从具体的实例开始，通过具体的实例让学生认识到，某些几何变换可以用矩阵来表示，丰富学生对矩阵几何意义的理解，并引导学生用映射的观点来认识矩阵、解线性方程组。

3. 要求从图形的变换直观地理解矩阵的乘法，并通过具体的实例让学生理解矩阵乘法的运算律。

4. 要在具体的实例中理解逆矩阵和特征值的实际意义及其不变

性，结合具体实例能用线性方程组或用行列式来求解简单二阶矩阵的逆矩阵和特征值。逆矩阵的唯一性定理要结合具体几何变换来理解其合理性。

5. 在学习二阶矩阵基础知识的同时，教师可以根据教学的实际情况适时地介绍一些矩阵的拓广知识（如三阶矩阵或高阶矩阵），这些不要求学生掌握，只要求学生作一些感性的认识，也便于学生对矩阵的有关知识有一个较为全面的了解，有利于以后的学习。

6. 这部分内容的教学应让学生认识到，矩阵从实际生活需要中产生，并在实际的问题中有着广泛的应用，体验数学的抽象更有助于人们对问题的思考与解决。

数列与差分

随着信息技术的日益普及和发展，离散数学的应用越来越广泛。差分和差分方程是描述离散变量变化的重要工具，在理论上是十分重要的，并且有广泛的应用。

本专题初步研究数列的差分和简单的差分方程，使学生掌握一些用离散变量分析解决问题的方法。

内容与要求

1. 数列的差分

- (1) 通过一些具体实例，理解数列差分的概念。
- (2) 理解数列的一、二阶差分以及它们对描述数列变化的意义，结合数列（作为函数）的图象，了解差分与数列的增减、极值、数列图象的凹凸的关系。

2. 一阶线性差分方程 $x_{n+1}=kx_n+b$

- (1) 通过一些具体实例，体会方程 $x_{n+1}=kx_n+b$ 是十分有用的数学模型。
- (2) 理解方程 $x_{n+1}=kx_n+b$ 中，当 $b=0$ （即方程为齐次方程）时，其解为等比数列；当 $k=1$ （即差分为常数）时，其解为等差数列。

(3) 认识方程 $x_{n+1}=kx_n+b$ 的通解、特解, 了解方程的解与相应的齐次方程 $x_{n+1}=kx_n$ 通解的关系; 能给出方程 $x_{n+1}=kx_n+b$ 的通解公式。

$$3. \text{ (二元) 一阶线性差分方程组 } \begin{cases} x_{n+1}=ax_n+by_n+c \\ y_{n+1}=dx_n+ey_n+f \end{cases}$$

(1) 通过一些实例, 认识一阶线性差分方程组是描述现实世界的一个重要模型。

(2) 了解一阶线性差分方程组的通解、特解与其相应齐次方程组通解的关系。

(3) 给定初值, 会用迭代法求一阶线性差分方程组的解; 能写出求解的算法框图。

(4) 对给定的具体方程组, 能初步讨论当 $n \rightarrow \infty$ 时, 解 (数列) 的变化趋势 (收敛、发散、周期)。

4. 通过具体实例 (如种群增长等), 体会方程 $x_{n+1}=kx_n(1-x_n)$ 是十分有用的数学模型。借助计算工具, 用迭代法分别对 k 取一些特殊值 (如 $0 < k \leq 1$, $1 < k \leq 3$, $k=3.4$, $k=3.55$, $k=3.7$) 的情形, 讨论 x_n 的变化, 初步了解非线性问题的复杂性。

5. 应用

(1) 学会用差分方程和差分方程组解决一些简单的实际问题。

(2) 初步体会连续变量离散化的思想, 能用它来讨论一些简单的问题。

6. 完成一个学习总结报告。报告应包括三方面的内容: (1) 知识的总结。对本专题内容的整体结构和内容的理解, 对刻画离散变量变化的数学方法的认识。(2) 拓展。通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考, 进一步探讨差分方程及其应用。(3) 对本专题学习的感受。

说明与建议

1. 教学过程和教材编写, 应通过大量实例, 帮助学生理解差分

的概念和差分方程的意义，力求深入浅出。

2. 通过对一阶线性差分方程的讨论，使学生理解方程解的结构，即通解、特解以及与齐次方程通解的关系。这不仅仅是为了求解差分方程，而且对将来进一步学习线性方程组、常微分方程等内容都有所帮助。

3. 关注学生用差分方程解决实际问题的能力。特别应鼓励学生能从实际问题建立差分方程，并能结合实际问题引导学生讨论解的实际意义。

4. 迭代方法是解决问题常用的数学方法之一，应使学生结合具体问题去体会迭代方法的意义和作用。

5. 在学习差分概念的过程中，应有意识地把差分和导数的概念进行对比，体会差分概念的意义和作用，并初步了解把连续变量离散化的思想。

坐标系与参数方程

坐标系是解析几何的基础。在坐标系中，可以用有序实数组确定点的位置，进而用方程刻画几何图形。为便于用代数的方法刻画几何图形或描述自然现象，需要建立不同的坐标系。极坐标系、柱坐标系、球坐标系等是与直角坐标系不同的坐标系，对于有些几何图形，选用这些坐标系可以使建立的方程更加简单。

参数方程是以参变量为中介来表示曲线上点的坐标的方程，是曲线在同一坐标系下的又一种表示形式。某些曲线用参数方程表示比用普通方程表示更方便。学习参数方程有助于学生进一步体会解决问题中数学方法的灵活多变。

本专题是解析几何初步、平面向量、三角函数等内容的综合应用和进一步深化。极坐标系和参数方程是本专题的重点内容，对于柱坐标系、球坐标系等只作简单了解。通过对本专题的学习，学生将掌握极坐标和参数方程的基本概念，了解曲线的多种表现形式，体会从实

际问题中抽象出数学问题的过程，培养探究数学问题的兴趣和能力，体会数学在实际中的应用价值，提高应用意识和实践能力。

内容与要求

1. 坐标系

(1) 回顾在平面直角坐标系中刻画点的位置的方法，体会坐标系的作用。

(2) 通过具体例子，了解在平面直角坐标系伸缩变换作用下平面图形的变化情况。

(3) 能在极坐标系中用极坐标刻画点的位置，体会在极坐标系和平面直角坐标系中刻画点的位置的区别，能进行极坐标和直角坐标的互化。

(4) 能在极坐标系中给出简单图形（如过极点的直线、过极点或圆心在极点的圆）的方程。通过比较这些图形在极坐标系和平面直角坐标系中的方程，体会在用方程刻画平面图形时选择适当坐标系的意义。

(5) 借助具体实例（如圆形体育场看台的座位、地球的经纬度等）了解在柱坐标系、球坐标系中刻画空间中点的位置的方法，并与空间直角坐标系中刻画点的位置的方法相比较，体会它们的区别。

2. 参数方程

(1) 通过分析抛物运动中时间与运动物体位置的关系，写出抛物运动轨迹的参数方程，体会参数的意义。

(2) 分析直线、圆和圆锥曲线的几何性质，选择适当的参数写出它们的参数方程。

(3) 举例说明某些曲线用参数方程表示比用普通方程表示更方便，感受参数方程的优越性。

(4) 借助教具或计算机软件，观察圆在直线上滚动时圆上定点的轨迹（平摆线）、直线在圆上滚动时直线上定点的轨迹（渐开线），了解平摆线和渐开线的生成过程，并能推导出它们的参数方程。

(5) 通过阅读材料,了解其他摆线(变幅平摆线、变幅渐开线、外摆线、内摆线、环摆线)的生成过程;了解摆线在实际中应用的实例(例如,最速降线是平摆线,椭圆是特殊的内摆线——卡丹转盘,圆摆线齿轮与渐开线齿轮,收割机、翻土机等机械装置的摆线原理与设计,星形线与公共汽车门);了解摆线在刻画行星运动轨道中的作用。

3. 完成一个学习总结报告

报告应包括三方面的内容:(1)知识的总结。对本专题整体结构和内容的理解,进一步认识数形结合思想,思考本专题与高中其他内容之间的联系。(2)拓展。通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考,进一步探讨参数方程、摆线的应用。(3)学习本专题的感受、体会。

说明与建议

1. 坐标系的教学应着重让学生理解平面和空间中点的位置都可以用有序数组(坐标)来刻画,在不同坐标系中,这些数所体现的几何含义不同。同一几何图形的方程在不同坐标系中具有不同的形式。因此,选择适当的坐标系可以使表示图形的方程具有更方便的形式。

2. 在坐标系的教学,可以引导学生自己尝试建立坐标系,说明建立坐标系的原则,激励学生的发散思维和创新思维,并通过具体实例说明这样建立坐标系有哪些方便之处。

3. 应通过对具体物理现象的分析(如抛物体运动的轨迹)引入参数方程,使学生了解参数的作用。

4. 应注意鼓励学生运用已有的平面向量、三角函数等知识,选择适当的参数建立曲线的参数方程。

5. 可以组织学生成立兴趣小组,合作研究摆线的性质,收集摆线应用的实例。

6. 可以应用计算机展现心脏线、螺线、玫瑰线、叶形线、摆线、渐开线等,使学生感受这些曲线的美。

不等式选讲

在自然界中存在着大量的不等量关系和等量关系，不等关系和相等关系是基本的数学关系。它们在数学研究和数学应用中起着重要的作用。

本专题将介绍一些重要的不等式和它们的证明、数学归纳法和它的简单应用。本专题特别强调不等式及其证明的几何意义与背景，以加深学生对这些不等式的数学本质的理解，提高学生的逻辑思维能力和分析解决问题的能力。

内容与要求

1. 回顾和复习不等式的基本性质和基本不等式。
2. 理解绝对值的几何意义，并能利用绝对值不等式的几何意义证明以下不等式：

$$(1) |a+b| \leq |a| + |b|;$$

$$(2) |a-b| \leq |a-c| + |c-b|;$$

- (3) 会利用绝对值的几何意义求解以下类型的不等式：

$$|ax+b| \leq c;$$

$$|ax+b| \geq c;$$

$$|x-c| + |x-b| \geq a.$$

3. 认识柯西不等式的几种不同形式。理解它们的几何意义。

- (1) 证明：柯西不等式向量形式： $|\alpha||\beta| \geq |\alpha \cdot \beta|$ 。

- (2) 证明： $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$ 。

- (3) 证明：

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} + \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2} \\ & \geq \sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}. \end{aligned}$$

(通常称作平面三角不等式)。

4. 用参数配方法讨论柯西不等式的一般情况：

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2.$$

5. 用向量递归方法讨论排序不等式。

6. 了解数学归纳法的原理及其使用范围，会用数学归纳法证明一些简单问题。

7. 会用数学归纳法证明贝努利不等式：

$$(1+x)^n > 1+nx \quad (x > -1, x \neq 0, n \text{ 为大于 } 1 \text{ 的正整数}).$$

了解当 n 为大于 1 的实数时贝努利不等式也成立。

8. 会用上述不等式证明一些简单问题。能够利用平均值不等式、柯西不等式求一些特定函数的极值。

9. 通过一些简单问题了解证明不等式的基本方法：比较法、综合法、分析法、反证法、放缩法。

10. 完成一个学习总结报告。报告应包括三方面的内容：(1) 知识的总结。对本专题介绍的不等式中蕴涵的数学思想方法和数学背景进行总结。(2) 拓展。通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考，进一步探讨不等式的应用。(3) 对不等式学习的感受、体会。

说明与建议

1. 在本专题教学中，教师应引导学生了解重要的不等式都有深刻的数学意义和背景，例如本专题给出的不等式大都有明确的几何背景。学生在学习中应该把握这些几何背景，理解这些不等式的实质。

2. 利用代数恒等变换以及放大、缩小方法是证明不等式的常用方法，例如，比较法、综合法、分析法、反证法、放缩法等，在很多情况下需要一些前人为我们创造的技巧，对于专门从事某些数学领域研究的人们掌握这些技巧是极为重要的。但是，对大多数学习不等式的人来说，常常很难从这些复杂的代数恒等变换中看到数学的本质，对他们更为重要的是理解这些不等式的数学思想和背景。所以，本专题尽力使用几何或其他方法来证明这些不等式，使学生较为容易地理解这些不等式以及证明的数学思想，不对恒等变换的

难度特别是一些技巧做更多的要求，不希望不等式的教学陷在过于形式化的和复杂的恒等变换的技巧之中。要求教材的编写者和教师不要选择那些代数恒等变换比较复杂或过于技巧化的问题或习题。

3. 数学归纳法是重要的数学思想方法，教师应通过对一些简单问题的分析，帮助学生掌握这种思想方法。在利用数学归纳法解决问题时，常常需要进行一些代数恒等变换。要求教材的编写者和教师不要选择那些代数恒等变换比较复杂或过于技巧化的问题或习题，以免冲淡了对数学归纳法思想的理解。

初等数论初步

数论是古老而又基础的数学，至今仍有许多没有解决的问题，一些问题的解决对现代数学的发展起了重要的推动作用，也产生了一些直接与数学有关的新的重要的数学分支，而且在现代信息技术中有很重要的应用。在日常生活中，也常常会遇到数论的一些问题。

本专题学生将通过具体的问题学习有关整数和整除的知识，探索用辗转相除法求解简单的一次不定方程、简单同余方程、同余方程组等，从中体会思想方法，了解我国古代数学的一些重要成就。

内容与要求

1. 通过实例（如星期），认识带余除法，理解同余和剩余类的概念及意义，探索剩余类的运算性质（加法和乘法），并且理解它的实际意义。体会剩余类运算与传统的数的运算的异同（会出现零因子）。

2. 理解整除、因数和素数的概念，了解确定素数的方法（筛法），知道素数有无穷多。

3. 了解十进制表示的整数的整除判别法，探索整数能被 3, 9, 11, 7 等整除的判别法。会检查整数加法、乘法运算错误的一种方法。

4. 通过实例探索利用辗转相除法求两个整数的最大公约数的方法，理解互素的概念，并能用辗转相除法证明：若 a 能整除 bc ，且 a, b 互素，则 a 能整除 c 。探索公因数和公倍数的性质。了解算术

基本定理。

5. 通过实例理解一次不定方程的模型，利用辗转相除法求解一次不定方程。并尝试写出算法程序框图，在条件允许的情况下，可上机实现。

6. 通过实例（如韩信点兵），理解一次同余方程组模型。

7. 理解大衍求一术和孙子定理的证明。

8. 理解费马小定理和欧拉定理及其证明。

费马小定理：当 m 是素数， a 、 m 互素时， $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$ 。

欧拉定理：当 a 、 m 互素时， $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ ，其中 $\varphi(m)$ 是 $\{1, 2, \dots, m-1\}$ 中与 m 互素的数的个数。

9. 了解数论在密码中的应用——公开密钥。

10. 完成一个学习总结报告。报告应包括三方面的内容：（1）知识的总结。对本专题整体结构和内容的理解，对正整数基本性质及其研究方法的认识。（2）拓展。通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考，进一步探讨数论的应用。（3）对本专题学习的感受、体会。

说明与建议

1. 由于整数的整除式是学生在操作上比较熟悉，而在论理上比较生疏的内容，教师可以只讲解一些主要的方法和性质，其他的一些性质则由学生经过讨论或自主探索完成。

2. 孙子定理由特解而后求通解的想法和建立 Lagrange 插值公式是一样的，因此列入建立插值公式一节有助于学生加强注意有关内容联系的意识。

3. 剩余类环中会出现零因子，对于开阔学生关于运算的眼界是有益的。但是理解可能难一点，是否安排探索，教师可以酌情处理。

4. 多项式整除的方法和性质与整数的整除性质几乎完全平行，可以安排学生进行探索。多项式的竖式除法是一个实行多项式除法的有效方式，与整数的竖式除法类似，可以作为附录列出。

优选法与试验设计初步

在生产和科学试验中，人们为了达到优质、高产、低消耗等目标，需要对有关因素的最佳组合（简称最佳点）进行选择，关于最佳组合（最佳点）的选择问题，称为选优问题。在实践中的许多情况下，试验结果与因素的关系，要么很难用数学形式来表达，要么表达式很复杂，优选法与试验设计是解决这类问题的常用数学方法。20世纪60年代，著名数学家华罗庚亲自组织推广了优选法，并在全国工业部门得到了广泛的应用，取得了可喜的成果。

简单地说，优选法是合理地安排试验以求迅速找到最佳点的数学方法。试验设计也是一种数学方法，一般说来，它是考虑在多因素情况下安排试验的方法，它可以帮助人们通过较少的试验次数得到较好的因素组合，形成较好的设计方案。

本专题将结合具体实例，初步地介绍单因素、双因素的优选法和多因素的正交试验设计方法，并对方法给予简单的说明，帮助学生理解这些方法的基本思想，并能思考和解决一些简单的实际问题。

内容与要求

1. 通过丰富的生活、生产案例，使学生感受在现实生活中存在着大量的优选问题。

2. 通过分析和解决具体实际问题，使学生掌握分数法、0.618法及其适用范围，可以利用计算机（或计算器）进行试验，并能思考和尝试运用这些方法解决一些实际问题，体会优选的思想方法。

3. 了解斐波那契数列 $\{F_n\}$ ，理解在试验次数确定的情况下分数法最佳性的证明，通过连分数知道 $\frac{F_{n-1}}{F_n}$ 和黄金分割的关系。

4. 通过一些具体的实例，使学生知道对分法、爬山法、分批试验法，以及目标函数为多峰情况下的处理方法。

5. 通过丰富的实例，了解多因素优选问题，了解处理双因素问

题的一些优选方法，进一步体会优选的思想方法。

6. 通过丰富的生活、生产案例，使学生感受在现实生活中存在着大量的试验设计问题。

7. 通过对具体案例（因素不超过3，水平不超过4）的分析，理解运用正交试验设计方法解决简单问题的过程，了解正交试验的思想和方法，并能运用这种方法思考和解决一些简单的实际问题。

8. 完成一个学习总结报告。报告应包括三方面的内容：（1）知识的总结。对本专题的整体结构和内容的理解，对实验设计方法及其意义的认识。（2）拓展。通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考，对某些内容、某些结果和应用进行拓展和深入。（3）对本专题的感受、体会、看法。

说明与建议

1. 本专题要求学生掌握一些优选的方法，尽管没有给予严格的数学证明，目的是让学生理解这些方法的思想和实质。

2. 作为一门应用课程，有条件的地方应让学生用所学的方法亲自做一些试验，以便更好地掌握这些方法。

3. 使学生认识到，应根据问题的具体情况讨论采用何种方法更为有效，并要与具体问题的专业知识相结合。同时，要能比较不同方法的利弊和适用范围。

统筹法与图论初步

统筹法是运筹学中的一个基本方法，是现代项目管理理论中最重要的方法之一。本专题将通过实例介绍统筹法及其应用，同时介绍图的基本概念，给出图上最短路和最小生成树算法，使学生对图论及其应用有一初步了解。

内容与要求

1. 统筹方法

(1) 通过实例了解统筹问题的思想及其应用的广泛性。

- (2) 通过实例理解统筹法中的基本概念。
- (3) 通过实例掌握绘制统筹图的方法。
- (4) 学会计算统筹图中的参数：事项最早开始时间和最迟到达时间，工序的时差。
- (5) 学会寻找统筹图的关键路，掌握寻找关键路的算法，理解关键路的重要性。
- (6) 会用统筹方法分析和处理简单的实际问题。

2. 图论初步

- (1) 通过实例了解图的基本概念和图在刻画实际问题中关系的作用。
- (2) 通过实例了解图的生成树，掌握求图的生成树和最小生成树的算法。
- (3) 通过实例了解图的最短路问题，掌握求图的最短路的算法。
- (4) 了解一些图论的其他问题，并知道算法的复杂性。

3. 完成一个学习总结报告。报告应包括三方面的内容：(1) 知识的总结。对本专题的内容或部分内容（统筹法或图论）的整体思路、结构的理解，对其中蕴涵的数学思想方法的认识。(2) 拓展。通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考，对某些内容、某些结果和应用进行拓展和深入。(3) 对本专题的感受、体会、看法。

说明与建议

1. 统筹法是一个应用十分广泛的方法，在学习时不仅要求学生掌握该方法，还应培养学生的应用意识，即让学生结合自己的生活实际，有意识地收集可以应用该方法的实际问题。

2. 应让学生认识到，在解决实际问题时，可能会出现各种复杂因素（如时间的随机性、成本的变动、人力的调动等），一些现成的方法可能不能完全适用，需要结合其他数学工具来进行处理。

3. 在图论初步的教学中，一方面应让学生认识到图和网络是许多实际问题的重要数学模型，认识到研究它们的重要性；另一方面，

本专题侧重介绍一些算法，要求学生能清楚地表述这些算法，同时能对算法的复杂性问题有所了解。

风险与决策

在日常生活和经济活动中，例如，个人的采购、求职、投资，工商企业的生产或经营的方案，直至部门和全国的某一事业的计划，经常需要对事物的进展情况做出决策，以使用最有利的方式采取行动。由于事物的进展情况和信息往往受随机因素的影响，不能确切预料，决策往往带有风险。在这种情况下，决策者通常有很多行动方案可以采用，而统计决策方法可以提供最优的行动方案，大大减少由于盲目地决定而导致的损失。因此，统计决策方法和统计决策分析将会在社会的发展和进步中发挥越来越大的作用。

在现代社会中，公民应该具有合理的决策能力。因此，在中学阶段最好能掌握一些简单的统计决策方面的知识和方法，形成初步的决策意识。本专题就是为此目的而设立的。

内容与要求

1. 从日常生活及经济活动中的实例分析，形成重视风险的意识、理解风险决策的必要性和重要性，理解风险决策的概念。
2. 从实例理解损益函数与损益矩阵，探索决策的途径与方法，理解决策结论的意义。
3. 学会用决策树表示需要决策问题的有关信息，能用反推决策树的方法进行决策。
4. 通过实例理解风险决策灵敏度分析的意义，会进行决策的灵敏度分析。
5. 通过实例了解马尔可夫型决策及其决策方法。
6. 完成一个学习总结报告。报告应包括三方面的内容：(1) 知识的总结。对本专题的整体思路、结构和内容的理解，对风险决策方法及其意义的认识。(2) 拓展。通过查阅资料、调查研究、访问

求教、独立思考，对某些内容、某些结果和应用进行拓展和深入。

(3) 对本专题的感受、体会、看法。

说明与建议

1. 整个专题应该以多种实例为主线展开，帮助学生理解决策应用的广泛性，理解决策的结果具有风险性以及它的实际意义和有效性。概念应当尽可能少，只是在必要时引入。方法应该通过具体的例子进行介绍，在此基础上辅以必要的推广和总结。

2. 先通过实例理解风险决策的概念，学会决策的初步方法；然后通过对具体例子分析，介绍损益函数和损益矩阵，理解决策树的作用以及掌握用决策树进行决策的方法。

3. 通过决策过程中概率估计的不精确性，理解灵敏度分析的必要性。

4. 马尔可夫型决策具有广泛的应用，高中学生可以通过例子加以理解，并掌握其方法，不要在一般理论和方法的水平上展开。

开关电路与布尔代数

高度的抽象性及其带来的符号化、形式化是数学的基本特征之一。不同的实际问题经抽象、概括后，可得到相同的数学概念、运算法则，乃至同一数学理论。反之，同一数学概念、运算法则和数学理论可应用到表面看来完全不同的实际问题中。

布尔代数是布尔 (G. Boole) 于 1847 年引入，用以研究命题演算的数学理论。后来，美国电气工程师申农指出，可以用布尔代数来研究开关电路及其相关问题。

本专题以设计由三人控制一个电灯的电路为背景，从开关电路设计，提出一个具体问题，将电路设计数学化为电路代数和电路多项式，再数学地研究电路和电路多项式，完全解决最初提出的问题，完整地给出一个电路代数的数学模型，这也是布尔代数的一个实际应用，从中可感受到数学化的抽象过程，以及数学理论的应用价值。

由电路的“并”“串”联和“逆反”产生的新电路的状态 $\{0, 1\}$ 是由原电路的状态 $\{0, 1\}$ ，经过运算 $+$ 、 \times 和余 ($\bar{0}=1, \bar{1}=0$) 得到的。此外，本专题中关于由简单命题通过“或”“且”和“非”（“否定”）组成的新命题的真与伪，也是由原命题的真与伪，经过运算 $+$ 、 \times 和余 ($\bar{0}=1, \bar{1}=0$) 得到的。它们是一脉相承的。这些运算与中学数学所学的数与多项式的运算也有相似之处。因此，本专题的学习对中学生深入认识数与多项式的本质也是非常有益的。

内容与要求

1. 通过开关电路知道电路和电路的两种状态以及它们的数学表示。知道什么是两个电路的并联和串联，什么是逆反电路，以及它们的状态是怎样确定的。

2. 通过对开关电路的分析，认识新电路的状态是由原电路的状态通过运算形成的。掌握状态和状态的运算两个概念。

3. 通过状态和状态的运算，抽象出布尔代数、电路函数和电路多项式的概念。感悟从实际问题抽象、概括为数学问题的过程和用数学理论解决实际问题的思想方法。

4. 理解任意电路都可以用一个电路函数来表示，而电路函数又都可以用一个电路多项式实现。

5. 通过命题演算的学习，了解什么是命题和命题的取值。认识什么是两个命题的“或命题”和“且命题”，什么是一个命题的“非命题”（“否定命题”），这些新命题的取值是怎样确定的。

6. 比较开关电路与命题演算的关系，并能尝试用简单的例子说明。比较布尔代数与有理数系中的运算，考虑它们之间的共同点、不同点和相似之处。

7. 完成一个学习总结报告。报告应包括三方面的内容：（1）知识的总结。对本专题的整体思路、结构和内容的理解，对其中蕴涵的数学思想方法的认识。（2）拓展。通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考，对某些内容、某些结果和应用进行拓展和深入。

(3) 对本专题的感受、体会、看法。

说明与建议

1. 本专题应充分体现从实际问题转化为数学问题，用数学方法解决实际问题的过程；体现不同的实际问题经抽象、概括后，可得到相同的数学概念乃至同一数学理论。为此，可通过具体例子来引入开关电路，并对学生进行将电路图用数学方式表达，以及根据数学表达式画出电路图的训练，帮助学生理解任意电路都可以用电路函数来表示，而电路函数又可以用一个电路多项式来实现。

2. 通过具体电路的数学表达式，来计算各种各样电路的状态，从而掌握、理解电路代数的结构，即数学表达式中每个字母可以取的状态所有不同的搭配的全体，通过每个字母取的状态之间的运算所得到的状态。通过一步一步的运算过程来理解布尔代数运算法则。

3. 可以要求学生将本专题所学的数学理论用到计算机中的加法器、逻辑器等某些部件的运算上，也可以将本专题的学习采用撰写论文或写总结报告的形式。

三、数学探究、数学建模、数学文化

数学探究、数学建模、数学文化是贯穿于整个高中数学课程的重要内容，这些内容不单独设置，渗透在每个模块或专题中。高中阶段至少各应安排一次较为完整的数学探究、数学建模活动。以下是对数学探究、数学建模、数学文化的教学要求。

数学探究

数学探究即数学探究性课题学习，是指学生围绕某个数学问题，自主探究、学习的过程。这个过程包括：观察分析数学事实，提出有意义的数学问题，猜测、探求适当的数学结论或规律，给出解释或证明。

数学探究是高中数学课程中引入的一种新的学习方式，有助于

学生初步了解数学概念和结论产生的过程，初步理解直观和严谨的关系，初步尝试数学研究的过程，体验创造的激情，建立严谨的科学态度和不怕困难的科学精神；有助于培养学生勇于质疑和善于反思的习惯，培养学生发现、提出、解决数学问题的能力；有助于发展学生的创新意识和实践能力。

要求

1. 数学探究课题的选择是完成探究学习的关键。课题的选择要有助于学生对数学的理解，有助于学生体验数学研究的过程，有助于学生形成发现、探究问题的意识，有助于鼓励学生发挥自己的想像力和创造性。课题应具有一定的开放性，课题的预备知识最好不超出学生现有的知识范围。

2. 数学探究课题应该多样化，可以是某些数学结果的推广和深入，不同数学内容之间的联系和类比，也可以是发现和探索对自己来说是新的数学结果。

3. 数学探究课题可以从教材提供的案例和背景材料中发现和建立，也可以从教师提供的案例和背景材料中发现和建立，应该特别鼓励学生在学习数学知识、技能、方法、思想的过程中发现和提出自己的问题并加以研究。

4. 学生在数学探究的过程中，应学会查询资料、收集信息、阅读文献。

5. 学生在数学探究中，应养成独立思考和勇于质疑的习惯，同时也应学会与他人交流合作，建立严谨的科学态度和不怕困难的顽强精神。

6. 在数学探究中，学生将初步了解数学概念和结论的产生过程，体验数学研究的过程和创造的激情，提高发现、提出、解决数学问题的能力，发挥自己的想像力和创新精神。

7. 高中阶段至少应为学生安排1次数学探究活动。还应将课内与课外有机地结合起来。

我们不对数学探究的课时和内容做具体安排。学校和教师可根据各自的实际情况，统筹安排数学探究活动的内容和时间。例如，可以结合方程的近似求解、导数的应用等内容安排数学探究活动。

说明与建议

1. 教师应努力成为数学探究课题的创造者，有比较开阔的数学视野，了解与中学数学知识有关的扩展知识和内在的数学思想，认真思考其中的一些问题，加深对数学的理解，提高数学能力，为指导学生进行数学探究做好充分的准备，并积累指导学生进行数学探究的资源。

2. 教师要成为学生进行数学探究的组织者、指导者、合作者。教师应该为学生提供较为丰富的数学探究课题的案例和背景材料；引导和帮助而不是代替学生发现和提出探究课题，特别应该鼓励和帮助学生独立地发现和提出问题；组织和鼓励学生组成课题组合作地解决问题；指导和帮助学生养成查阅相关的参考书籍和资料、在计算机网络上查找和引证资料的习惯；一方面应该鼓励学生独立思考，帮助学生建立克服困难的毅力和勇气，另一方面应该指导学生在独立思考的基础上用各种方式寻求帮助；在学生需要的时候，教师应该成为学生平等的合作者，教师要有勇气和学生一起进行探究。

3. 教师应该根据学生的差异，进行有针对性的指导。在鼓励学生创新的同时，允许一部分学生可以在模仿的基础上发挥自己的想像力和创造力。

4. 数学探究的结果以课题报告或课题论文的方式完成。课题报告包括课题名称、问题背景、对事实的观察分析、对结果的猜测、对结果的论证、合作情形、对探究结果的体会或评论、引证的文献资料等方面。

5. 可以通过小组报告、班级报告、答辩会等方式交流探究成果，通过师生之间和学生之间的讨论来评价探究学习的成绩，评价主要是正面鼓励学生的探索精神，肯定学生的创造性劳动，同时也

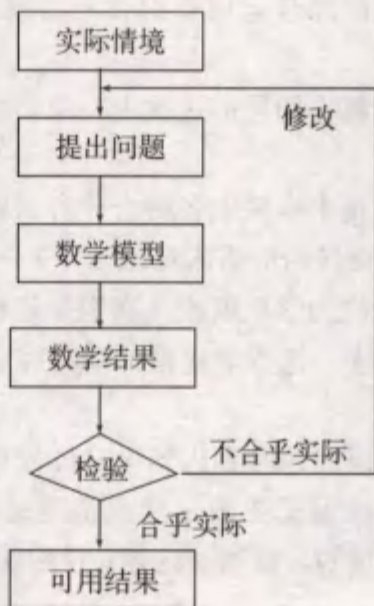
指出存在的问题和不足。

6. 数学探究报告及评语可以记入学生成长记录, 作为反映学生数学学习过程的资料和推荐依据。对于学生中优秀的报告或论文应该给予鼓励, 可以采取表扬、评奖、推荐杂志发表、编辑出版、向高等学校推荐等多种形式。

7. 教材在适当的章节应该提供一些数学探究课题的案例和背景材料, 可以提供一些由学生完成的数学探究的案例, 可以为教师指导数学探究学习提供一些参考性的建议。

数学建模

数学建模是运用数学思想、方法和知识解决实际问题的过程, 已经成为不同层次数学教育重要和基本的内容。数学建模可以通过以下框图体现:



数学建模是数学学习的一种新的方式, 它为学生提供了自主学习空间, 有助于学生体验数学在解决实际问题中的价值和作用,

体验数学与日常生活和其他学科的联系，体验综合运用知识和方法解决实际问题的过程，增强应用意识；有助于激发学生学习数学的兴趣，发展学生的创新意识和实践能力。

要求

1. 在数学建模中，问题是关键。数学建模的问题应是多样的，应来自于学生的日常生活、现实世界、其他学科等多方面。同时，解决问题所涉及的知识、思想、方法应与高中数学课程内容有联系。

2. 通过数学建模，学生将了解和经历上述框图所表示的解决实际问题的全过程，体验数学与日常生活及其他学科的联系，感受数学的实用价值，增强应用意识，提高实践能力。

3. 每一个学生可以根据自己的生活经验发现并提出问题，对同样的问题，可以发挥自己的特长和个性，从不同的角度、层次探索解决的方法，从而获得综合运用知识和方法解决实际问题的经验，发展创新意识。

4. 学生在发现和解决问题的过程中，应学会通过查询资料等手段获取信息。

5. 学生在数学建模中应采取各种合作方式解决问题，养成与人交流的习惯，并获得良好的情感体验。

6. 高中阶段至少应为学生安排1次数学建模活动。还应将课内与课外有机地结合起来，把数学建模活动与综合实践活动有机地结合起来。

我们不对数学建模的课时和内容做具体安排。学校和教师可根据各自的实际情况，统筹安排数学建模活动的内容和时间。例如，可以结合统计、线性规划、数列等内容安排数学建模活动。

说明与建议

1. 学校和学生可根据各自的实际情况，确定数学建模活动的次数和时间安排。数学建模可以由教师根据教学内容以及学生的实际

情况提出一些问题供学生选择；或者提供一些实际情景，引导学生提出问题；特别要鼓励学生从自己生活的世界中发现問題、提出问题。

2. 数学建模可以采取课题组的学习模式，教师应引导和组织学生学会独立思考、分工合作、交流讨论、寻求帮助。教师应成为学生的合作伙伴和参谋。

3. 数学建模活动中，应鼓励学生使用计算机、计算器等工具。教师在必要时应给予适当的指导。

4. 教师应指导学生完成数学建模报告，报告中应包括问题提出的背景、问题解决方案的设计、问题解决的过程、合作过程、结果的评价以及参考文献等。

5. 评价学生在数学建模中的表现时，要重过程、重参与。不要苛求数学建模过程的严密、结果的准确。评价内容应关注以下几个方面：

——创新性。问题的提出和解决的方案有新意。

——现实性。问题来源于学生的现实。

——真实性。确实是学生本人参与制作的，数据是真实的。

——合理性。建模过程中使用的数学方法得当，求解过程合乎常理。

——有效性。建模的结果有一定的实际意义。

以上几个方面不必追求全面，只要有一项做得比较好就应该予以肯定。

6. 对数学建模的评价可以采取答辩会、报告会、交流会等形式进行，通过师生之间、学生之间的提问交流给出定性的评价，应该特别鼓励学生工作中的“闪光点”。

7. 数学建模报告及评价可以记入学生成长记录，作为反映学生数学学习过程的资料和推荐依据。对于学生中优秀的论文应该给予鼓励，可以采取表扬、评奖、推荐杂志发表、编辑出版、向高等学

校推荐等多种形式。

8. 教材中应该提供一些适合学生水平的数学建模问题和背景材料供学生和教师参考；教材中可以提供一些由学生完成的数学建模的案例，以激发学生的兴趣。

数学文化

数学是人类文化的重要组成部分。数学是人类社会进步的产物，也是推动社会发展的动力。通过在高中阶段数学文化的学习，学生将初步了解数学科学与人类社会之间的相互作用，体会数学的科学价值、应用价值、人文价值，开阔视野，寻求数学进步的历史轨迹，激发对于数学创新原动力的认识，受到优秀文化的熏陶，领会数学的美学价值，从而提高自身的文化素养和创新意识。

要求

1. 数学文化应尽可能有机地结合高中数学课程的内容，选择介绍一些对数学发展起重大作用的历史事件和人物，反映数学在人类社会进步、人类文明发展中的作用，同时也反映社会发展对数学发展的促进作用。

2. 学生通过数学文化的学习，了解人类社会发展与数学发展的相互作用，认识数学发生、发展的必然规律；了解人类从数学的角度认识客观世界的过程；发展求知、求实、勇于探索的情感和态度；体会数学的系统性、严密性、应用的广泛性，了解数学真理的相对性；提高学习数学的兴趣。

3. 以下选题供参考。

- (1) 数的产生与发展；
- (2) 欧几里得《几何原本》与公理化思想；
- (3) 平面解析几何的产生与数形结合的思想；
- (4) 微积分与极限思想；

- (5) 非欧几何与相对论问题；
- (6) 拓扑学的产生；
- (7) 二进制与计算机；
- (8) 计算的复杂性；
- (9) 广告中的数据与可靠性；
- (10) 商标设计与几何图形；
- (11) 黄金分割引出的数学问题；
- (12) 艺术中的数学；
- (13) 无限与悖论；
- (14) 电视与图像压缩；
- (15) CT 扫描中的数学——拉东变换；
- (16) 军事与数学；
- (17) 金融中的数学；
- (18) 海岸线与分形；
- (19) 系统的可靠性。

说明与建议

1. 应当采取多样化的教学方式。例如，教师可以在教授数学知识时介绍有关的背景文化；可以作专题演讲；也可以鼓励和指导学生就某个专题查找、阅读、收集资料文献，在此基础上，编写一些形式丰富的数学小作文、科普报告，并组织学生进行交流。

2. 教师应结合有关内容有意识地强调数学的科学价值、文化价值、美学价值。

3. 教师在教学中应尽可能对有关课题作形象化的处理，例如，使用图片、幻灯、录像以及计算机软件。

4. 教师应充分开发和利用校内外的教育资源，并主动地与其他学科的教师（包括人文各学科）交流，更好地促进学科间的交融和渗透。

5. 可以和其他学科教师一起，考察学生在查阅文献、阅读资

料、撰写作文或报告、合作交流中的表现，对于优秀的作品应当给予鼓励、展示和推荐。

6. 教材中有关数学文化的内容，要注意介绍重要的数学思想、优秀的数学成果、有关人和事的人文精神，贯穿思想品德教育，要短小、生动、有趣、自然、深入浅出、通俗易懂。

第四部分 实施建议

一、教学建议

新一轮数学课程改革从理念、内容到实施，都有较大变化，要实现数学课程改革的目标，教师是关键。教师应首先转变观念，充分认识数学课程改革的理念和目标，以及自己在课程改革中的角色和作用。教师不仅是课程的实施者，而且也是课程的研究、建设和资源开发的重要力量。教师不仅是知识的传授者，而且也是学生学习的引导者、组织者和合作者。为了更好地实施新课程，教师应积极地探索和研究，提高自身的数学专业素质和教育科学素质。

数学教学要体现课程改革的基本理念，在教学设计中充分考虑数学的学科特点，高中学生的心理特点，不同水平、不同兴趣学生的学习需要，运用多种教学方法和手段，引导学生积极主动地学习，掌握数学的基础知识和基本技能以及它们所体现的数学思想方法，发展应用意识和创新意识，对数学有较为全面的认识，提高数学素养，形成积极的情感态度，为未来发展和进一步学习打好基础。在教学中应该把握好以下几个方面。

1. 以学生发展为本，指导学生合理选择课程、制定学习计划

为了体现时代性、基础性、选择性、多样性的基本理念，使不同学生学习不同的数学，在数学上获得不同的发展，高中数学课程设置了必修系列和四个选修系列的课程。教学中，要鼓励学生根据国家规定的课程方案和要求，以及各自的潜能和兴趣爱好，制定数学学习计划，自主选择数学课程，在学生选择课程的过程中，教师要根据学生的不同基础、不同水平、不同志趣和发展方向给予具体指导。

2. 帮助学生打好基础，发展能力

教师应帮助学生理解和掌握数学基础知识、基本技能，发展能力。具体来说：

(1) 强调对基本概念和基本思想的理解和掌握

教学中应强调对基本概念和基本思想的理解和掌握，对一些核心概念和基本思想（如函数、空间观念、运算、数形结合、向量、导数、统计、随机观念、算法等）要贯穿高中数学教学的始终，帮助学生逐步加深理解。由于数学高度抽象的特点，注重体现基本概念的来龙去脉。在教学中要引导学生经历从具体实例抽象出数学概念的过程，在初步运用中逐步理解概念的本质。

(2) 重视基本技能的训练

熟练掌握一些基本技能，对学好数学是非常重要的。在高中数学课程中，要重视运算、作图、推理、处理数据以及科学计算器的使用等基本技能训练。但应注意避免过于繁杂和技巧性过强的训练。

(3) 与时俱进地审视基础知识与基本技能

随着时代和数学的发展，高中数学的基础知识和基本技能也在发生变化，教学中要与时俱进地审视基础知识和基本技能。例如，统计、概率、导数、向量、算法等内容已经成为高中数学的基础知识。对原有的一些基础知识也要用新的理念来组织教学。例如，立体几何的教学可从不同视角展开——从整体到局部，从局部到整体，从具体到抽象，从一般到特殊，而且应注意用向量方法（代数方法）处理有关问题；不等式的教学要关注它的几何背景和应用；三角恒等变形的教学应加强与向量的联系，简化相应的运算和证明。又如，口头、书面的数学表达是学好数学的基本功，在教学中也应予以关注。同时，应删减繁琐的计算、人为技巧化的难题和过分强调细枝末节的内容，克服“双基异化”的倾向。

3. 注重联系，提高对数学整体的认识

数学的发展既有内在的动力，也有外在的动力。在高中数学的

教学中，要注重数学的不同分支和不同内容之间的联系，数学与日常生活的联系，数学与其他学科的联系。

高中数学课程是以模块和专题的形式呈现的。因此，教学中应注意沟通各部分内容之间的联系，通过类比、联想、知识的迁移和应用等方式，使学生体会知识之间的有机联系，感受数学的整体性，进一步理解数学的本质，提高解决问题的能力。例如，教学中要注重函数、方程、不等式的联系；向量与三角恒等变形、向量与几何、向量与代数的联系；数与形的联系；算法思想在有关内容中的渗透、在不同内容中的应用等。此外，还要注意数学与其他学科及现实世界的联系。例如，教学中应重视向量与力、速度的联系，导数与现实世界中存在的变化率的联系等。

4. 注重数学知识与实际的联系，发展学生的应用意识和能力

在数学教学中，应注重发展学生的应用意识；通过丰富的实例引入数学知识，引导学生应用数学知识解决实际问题，经历探索、解决问题的过程，体会数学的应用价值。帮助学生认识到：数学与我有关，与实际生活有关，数学是有用的，我要用数学，我能用数学。

在有关内容的教学中，教师应指导学生直接应用数学知识解决一些简单问题，例如，运用函数、数列、不等式、统计等知识直接解决问题；还应通过数学建模活动引导学生从实际情境中发现问题，并归结为数学模型，尝试用数学知识和方法去解决问题；也可向学生介绍数学在社会中的广泛应用，鼓励学生注意数学应用的事例，开阔他们的视野。

5. 关注数学的文化价值，促进学生科学观的形成

数学是人类文化的重要组成部分，是人类社会进步的产物，也是推动社会发展的动力。教学中应引导学生初步了解数学科学与人类社会发展之间的相互作用，体会数学的科学价值、应用价值、人文价值，开阔视野，探寻数学发展的历史轨迹，提高文化素养，养

成求实、说理、批判、质疑等理性思维的习惯和锲而不舍的追求真理精神。

在教学中，应尽可能结合高中数学课程的内容，介绍一些对数学发展起重大作用的历史事件和人物，反映数学在人类社会进步、人类文明建设中的作用，同时也反映社会发展对数学发展的促进作用。例如，教师在几何教学中可以向学生介绍欧几里得建立公理体系的思想方法对人类理性思维、数学发展、科学发展、社会进步的重大影响；在解析几何、微积分教学中，可以向学生介绍笛卡儿创立的解析几何，介绍牛顿、莱布尼茨创立的微积分，以及它们在文艺复兴后对科学、社会、人类思想进步的推动作用；在有关数系的教学中，可以向学生介绍数系的发展和扩充过程，让学生感受数学内部动力、外部动力以及人类理性思维对数学产生和发展的作用。

6. 改善教与学的方式，使学生主动地学习

丰富学生的学习方式、改进学生的学习方法是高中数学课程追求的基本理念。学生的数学学习活动不应只限于对概念、结论和技能的记忆、模仿和接受，独立思考、自主探索、动手实践、合作交流、阅读自学等都是学习数学的重要方式。在高中数学教学中，教师的讲授仍然是重要的教学方式之一，但要注意的是必须关注学生的主体参与，师生互动。高中数学课程在教育理念、学科内容、课程资源的开发利用等方面都对教师提出了挑战。在教学中，教师应根据高中数学课程的理念和目标，学生的认知特征和数学的特点，积极探索适合高中学生数学学习的教学方式。特别应注意以下几个方面。

(1) 高中数学课程增加了一些新的内容，对于这些内容，教师要把握标准的定位进行教学。例如，对算法内容，应着重强调使学生体会算法思想、提高逻辑思维能力，不应将算法简单处理成程序语言的学习和程序设计，同时应通过具体实例的上机实现（或编程）帮助学生理解算法思想及其作用。标准对传统内容的编排和要求也

有新的变化，为了更好地理解和把握，有效地进行教学，教师应进行必要的探索和研究，提高自身的数学专业素质和教育科学素质。

(2) 教学中，应鼓励学生积极参与教学活动，包括思维的参与和行为的参与。既要有教师的讲授和指导，也有学生的自主探索与合作交流。教师要创设适当的问题情境，鼓励学生发现数学的规律和问题解决的途径，使他们经历知识形成的过程。

(3) 加强几何直观，重视图形在数学学习中的作用，鼓励学生借助直观进行思考。在几何和其他内容的教学中，都应借助几何直观，揭示研究对象的性质和关系。例如，借助几何直观理解圆锥曲线，理解导数的概念、函数的单调性与导数的关系等。

(4) 在数学教学中，学习形式化的表达是一项基本要求，不能只限于形式化的表达，应注意揭示数学的本质。例如，有些概念（如函数）的教学是从已有知识和实例出发，再抽象为严格化的定义；有些内容（如统计）的教学是通过案例来学习它的思想和方法，理解其意义和作用；又如，对导数概念的理解，是通过实例，让学生经历从平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，进而了解导数概念的实际背景以及瞬时变化率就是导数，体会导数的思想及其内涵。

(5) 对不同的内容，可采用不同的教学和学习方式。例如，可采用收集资料、调查研究等方式，也可采用实践探索、自主探究、合作交流等方式，还可采用阅读理解、讨论交流、撰写论文等方式。

(6) 教师应根据不同的内容、目标以及学生的实际情况，给学生留有适当的拓展、延伸的空间和时间，对有关课题作进一步探索、研究。例如，反函数的一般概念、概率中几何概型的计算等都可作为拓展、延伸的内容。拓展、延伸的内容不作为考试的要求。

(7) 教师应充分尊重学生的人格和学生在数学学习上的差异，采用适当的教学方式，在数学学习和解决问题的过程中，激发学生对数学学习的兴趣，帮助学生养成良好的学习习惯，形成积极探索的态度，勤奋好学、勇于克服困难和不断进取的学风。

(8) 教师应不断反思自己的教学,改进教学方式,提高自己的教学水平,形成个性化的教学风格。

7. 恰当运用现代信息技术,提高教学质量

应重视信息技术与数学课程内容的有机整合,整合的原则是有利于对数学本质的认识。例如,算法初步已经作为必修系列内容,教师在教学中应注意它与有关内容的整合。又如,统计中数据的处理、方程的近似求解等都体现了信息技术与数学课程内容的整合,教师在教学中应予以关注。信息技术与数学课程内容的整合还有较大的开发空间,教师可在这方面进行积极的、有意义的探索。

现代信息技术的广泛应用正在对数学课程内容、数学教学、数学学习等方面产生深刻的影响。在教学中,应重视利用信息技术来呈现以往课堂教学中难以呈现的课程内容。同时,应尽可能使用科学型计算器、计算机及软件、互联网,以及各种数学教育技术平台,加强数学教学与信息技术的结合。教师应恰当使用信息技术,改善学生的学习方式,引导学生借助信息技术学习有关数学内容,探索、研究一些有意义、有价值的数学问题。

二、评价建议

数学学习评价,既要重视学生知识、技能的掌握和能力的提高,又要重视其情感、态度和价值观的变化;既要重视学生学习水平的甄别,又要重视其学习过程中主观能动性的发挥;既要重视定量的认识,又要重视定性的分析;既要重视教育者对学生的评价,又要重视学生的自评、互评。总之,应将评价贯穿数学学习的全过程,既要发挥评价的甄别与选拔功能,更要突出评价的激励与发展功能。

数学教学的评价应有利于营造良好的育人环境,有利于数学教与学活动过程的调控,有利于学生和教师的共同成长。

1. 重视对学生数学学习过程的评价

相对于结果,过程更能反映每个学生的发展变化,体现出学生

成长的历程。因此，数学学习的评价既要重视结果，也要重视过程。对学生数学学习过程的评价，包括学生参与数学活动的兴趣和态度、数学学习的自信、独立思考的习惯、合作交流的意识、数学认知的发展水平等方面。

下面给出一些具体评价内容的建议与要求。

◆ 通过数学学习过程的评价，应努力引导学生正确认识数学的价值，产生积极的数学学习态度、动机和兴趣。

◆ 独立思考是数学学习的基本特点之一，评价中应关注学生是否肯于思考、善于思考、坚持思考并不断地改进思考的方法与过程。

◆ 学习过程的评价，应关注学生是否积极主动地参与数学学习活动、是否愿意和能够与同伴交流数学学习的体会、与他人合作探究数学问题。

◆ 学生学好数学的自信心、勤奋、刻苦以及克服困难的毅力等良好的意志品质，也是数学学习过程评价的重要内容。

◆ 评价应特别重视考察学生能否从实际情境中抽象出数学知识以及能否应用数学知识解决问题。

◆ 评价应当重视考察学生能否理解并有条理地表达数学内容。

◆ 评价应关注学生能否不断反思自己的数学学习过程，并改进学习方法。

2. 正确评价学生的数学基础知识和基本技能

学生对基础知识和基本技能的理解与掌握是数学教学的基本要求，也是评价学生学习的基本内容。评价要注重对数学本质的理解和思想方法的把握，避免片面强调机械记忆、模仿以及复杂技巧。

下面给出一些具体评价内容的建议与要求。

◆ 评价对数学的理解，可以关注学生能否独立举出一定数量的用于说明问题的正例和反例。特别地，对核心概念学习的评价应该在高中数学学习的整个过程中予以关注。

◆ 评价应关注学生能否建立不同知识之间的联系，把握数学知

识的结构、体系。

◆对数学基本技能的评价，应关注学生能否在理解方法的基础上，针对问题特点进行合理选择，进而熟练运用。

◆数学语言具有精确、简约、形式化等特点，能否恰当地运用数学语言及自然语言进行表达与交流也是评价的重要内容。

3. 重视对学生能力的评价

学生能力的获得与提高是其自主学习、实现可持续发展的关键，评价对此应有正确导向。能力是通过知识的掌握和运用水平体现出来的，因此对于能力的评价应贯穿学生数学知识的建构过程与问题的解决过程。

如何评价能力既是课程改革面临的一个重要的课题，也是一个挑战。下面以数学地提出、分析、解决问题能力的评价为例，给出评价中应关注的方面。

◆在日常的数学学习，尤其是数学探索与数学建模活动中，是否具有问题意识，是否善于发现和提出问题。

◆能否选择有效的方法和手段收集信息、联系相关知识、提出解决问题的思路，建立恰当的数学模型，进而尝试解决问题。

◆能否在解决问题的过程中，既能够独立思考，又能够与他人很好地交流与合作。

◆能否对解决问题的方案进行质疑、调整和完善。

◆能否将解决问题的方案与结果，用书面或口头等形式比较准确地表达并进行交流，根据问题的实际要求进行分析、讨论或应用。

◆评价应当关注学生能否对自己提出问题和解决问题的过程进行自评与互评。

◆在评价中，要注意肯定学生在数学学习中的发展和进步、特点和优点。

4. 实施促进学生发展的多元化评价

促进学生发展的多元化评价的涵义是多方面的，包括评价主体

多元化、方式多元化、内容多元化和目标多元化等，应根据评价的目的和内容进行选择。

主体多元化，是指将教师评价、自我评价、学生互评、家长和社会有关人员评价等结合起来；方式多元化，是指定性与定量相结合，书面与口头相结合，课内与课外相结合，结果与过程相结合等；内容多元化，包括知识、技能和能力，过程、方法，情感、态度、价值观以及身心素质等内容的评价；目标多元化，是指对不同的学生有不同的评价标准，即尊重学生的个体差异、尊重学生对数学的不同选择，不以一个标准衡量所有学生的状况。

下面给出一些评价方式的具体建议。

◆ 评价应以尊重被评价对象为前提，评价主体要参与学校数学教育活动，并注意主体间的沟通。

◆ 笔试仍是定量评价的重要方式，但要注重考察对数学概念的理解、数学思想方法的掌握、数学思考的深度、探索与创新的水平以及应用数学解决实际问题的能力等。

◆ 定量评价可以采取百分制或等级制的方式，评价结果应及时反馈给学生，但要避免根据分数排列名次的现象发生。

◆ 定性评价可采取评语或成长记录等形式，评语或成长记录中应使用激励性语言全面、客观地描述学生的状况。

◆ 要重视学生做数学的过程，充分发挥数学作业在学生评价中的作用。作业的类型应多样化，例如常规作业，开放性、探索性数学问题，数学实验，数学建模，课题研究作业，专题总结报告等；作业结果的呈现形式也应是多样的，例如习题解答，数学学习体会，数学小论文，研究、实验或调查报告（书面、口头）等；对作业的评价可以是量化的，也可以是定性的。评价过程应积极主动、简单可行，避免增加学生负担。

◆ 应重视计算器、计算机等现代教育技术手段在评价学生学习中的运用。

总之，通过多元化的评价，可以更好地实现对学生多角度、全方位的评价与激励，努力使每一个学生都能得到成功的体验，有效地促进学生的发展。

5. 根据学生的不同选择进行评价

学生可以根据个人不同的条件以及不同的兴趣、志向，在高中阶段选择不同的数学课程组合进行学习（参见“对学生选课的建议”）。学校和教师应当根据学生的不同选择进行评价。

◆ 学生选择了自己的课程组合以后，学校和教师应为学生建立相应的学习档案，当学生完成课程模块或专题的学习时，将反映学生水平的学习成果记入档案。

◆ 当学生调整自己的课程组合时，学校和教师应及时地帮助学生做好已完成课程的评价，以及系列转换工作。

◆ 学校和教师的这些评价，将成为学生进入社会求职或高等院校招生时评价学生的依据。高等院校的招生考试应当根据高校的不同要求，按照高中数学课程标准所设置的5种不同课程组合进行命题、考试，命题范围为必修系列、选修系列1、选修系列2、选修系列4。根据课程内容的特点，对选修系列3的评价应采用定性与定量相结合的形式，由（高中）学校来完成。高等院校在录取时，应全面地考虑学校对学生在高中阶段数学学习的评价。

三、教材编写建议

教材是实现课程目标、实施教学的重要资源。高中数学教材的编写，要根据《基础教育课程改革纲要（试行）》的精神，贯彻高中数学课程的基本理念与要求，为课程的顺利实施提供保证。教材应当有利于调动教师的积极性，创造性地进行教学；有利于改进学生的学习方式，促进他们主动地学习和发展。

教材应以本标准中的模块为单位进行编写。本标准提倡教材编写的多样化，对于各模块所规定的教学内容的编排顺序可以做适当

的调整，不同的教材可以有各自的风格和特点。特别地，在教材的编写中，应当注意以下问题。

1. 素材的选取应体现数学的本质、联系实际、适应学生的特点

教材中素材的选取，首先要有助于反映相应数学内容的本质，有助于学生对数学的认识和理解，激发他们学习数学的兴趣，充分考虑学生的心理特征和认知水平。素材应具有基础性、时代性、典型性、多样性和可接受性。

高中学生已经具有较丰富的生活经验和一定的科学知识。因此，教材中应选择学生感兴趣的、与其生活实际密切相关的素材，现实世界中的常见现象或其他科学的实例，展现数学的概念、结论，体现数学的思想、方法，反映数学的应用，使学生感到数学就在自己身边，数学的应用无处不在。例如，在统计内容中，可以选择具有丰富生活背景的案例，展示统计思想和方法的广泛应用；通过行星运动的轨迹、凸凹镜等说明圆锥曲线的意义和应用；通过速度的变化率、体积的膨胀率，以及效率、密度等大量丰富的现实背景引入导数的概念。

2. 体现知识的发生发展过程，促进学生的自主探索

课程内容的呈现，应注意反映数学发展的规律，以及人们的认识规律，体现从具体到抽象、特殊到一般的原则。例如，在引入函数的一般概念时，应从学生已学过的具体函数（一次函数、二次函数）和生活中常见的函数关系（如气温的变化、出租车的计价）等入手，抽象出一般函数的概念和性质，使学生逐步理解函数的概念；立体几何内容，可以用长方体内点、线、面的关系为载体，使学生在直观感知的基础上，认识空间点、线、面的位置关系。

教材应注意创设情境，从具体实例出发，展现数学知识的发生、发展过程，使学生能够从中发现问题、提出问题，经历数学的发现和创造过程，了解知识的来龙去脉。

教材的呈现应为引导学生自主探索留有比较充分的空间，有利

于学生经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等过程。编写教材时，可以通过设置具有启发性、挑战性的问题，激发学生进行思考，鼓励学生自主探索，并在独立思考的基础上进行合作交流，在思考、探索和交流的过程中获得对数学较为全面的体验和理解。

3. 体现相关内容的联系，帮助学生全面地理解和认识数学

数学各部分内容之间的知识是相互联系的，学生的学习是循序渐进、逐步发展的。教材编写时应充分注意这些问题，不要因为高中数学课程内容划分成了若干模块，而忽视相关内容的联系。

为了培养学生对数学内部联系的认识，教材需要将不同的数学内容相互沟通，以加深学生对数学的认识和对本质的理解。例如，教材编写中可以借助二次函数的图象，比较和研究一元二次方程、不等式的解；比较等差数列与一次函数、等比数列与指数函数的图象，发现它们之间的联系等。

本标准的内容是根据学生的不同需要，分不同的系列和层次展开的。教材在处理这些内容时，还要注意明确相关内容在不同模块中的要求及其前后联系，注意使学生在已有知识的基础上螺旋上升、逐步提高。例如，统计的内容，在必修系列课程中主要是通过尽可能多的实例，使学生在义务教育阶段的基础上，体会随机抽样、用样本估计总体的统计思想，并学习一些处理数据的方法；在选修课中则是通过各种不同的案例，使学生进一步学习一些常用的统计方法，加深对统计思想及统计在社会生产生活中的作用的认识。

4. 注意新理念、新内容在教材编写上的特殊处理

依据本次课程改革的新理念，在高中数学课程中，引入了一些新的课程内容和新的处理方式，编写教材时应特别留意对它们的处理，按照本标准规定的内容要求来进行。

算法是高中数学课程中的新内容之一。教材要注意突出算法的思想，提供实例，使学生经历模仿、探索、程序框图设计、操作等过程，从而体会算法思想的本质，而不应将算法内容单纯处理成程

序语言的学习和程序设计。同时,教材还要注意在能够与算法结合的课程内容中,融入用算法解决问题的练习,不断加深学生对算法的认识。例如,可以在求一元二次不等式解的内容中融入算法的内容。

本标准设置了“数学探究”“数学建模”和“数学文化”等新的学习活动。教材编写时,应把这些活动恰当地穿插安排在有关的教学内容中,并注意提供相关的推荐课题、背景材料和示范案例,帮助学生设计自己的学习活动,完成课题作业或专题总结报告。

选修系列3,选修系列4教材的编写,应根据各系列的特点以及各专题的具体要求,进行积极的、有意义的、富有创造性的开发与探索。

5. 渗透数学文化,体现人文精神

在教材编写中,应将数学的文化价值渗透在各部分内容中,采取多种形式,如与具体数学内容相结合或单独设置栏目做专题介绍;也可以列出课外阅读的参考书目及相关资料源,以便学生自己查阅、收集整理。

6. 内容设计要有一定的弹性

教材编写时,内容设计要具有一定的弹性。例如,根据学生特点和兴趣,教材可以在高中数学课程的相关内容中安排一些引申的内容,这些内容可能是一些具有探索性的问题,也可能是一些拓展的数学内容,或一些重要的数学思想方法。选择和安排这些内容时,要注意思想性、反映数学的本质。这些内容不作评价要求。

7. 反映现代信息技术与数学课程的整合

随着时代的发展,信息技术已经渗透到数学教学中。如何使现代信息技术为学生的数学学习提供更多的帮助,是教材编写中值得注意和进一步思考的问题。使用现代信息技术的原则是有利于对数学本质的理解。教材可以在处理某些内容时,提倡使用计算器或计算机,帮助学生理解数学概念、探索数学结论,还应鼓励学生使用

现代技术手段处理繁杂的计算、解决实际问题，以取得更多的时间和精力去探索和发现数学的规律，培养创新精神和实践能力。另一方面，现代信息技术不仅在改进学生的学习方式上可以发挥巨大的潜力，而且可以渗透到数学的课程内容中来，教材应注意这些资源的整合。例如，可以把算法融入有关数学课程内容中；也可以引导学生通过网络搜集资料，研究数学的文化，体会数学的人文价值。

附 录

标准中引用的外国数学家人名中外文对照表

阿贝尔	Abel
阿基米德	Archimedes
贝努利	Bernoulli
毕达哥拉斯	Pythagoras
布尔	Boole
布劳威尔	Brouwer
笛卡儿	Descartes
棣弗-赫尔曼	Diffie-Hellman
棣莫弗	de Moivre
斐波那契	Fibonacci
费马	Fermat
伽利略	Galileo
伽罗瓦	Galois
盖莫尔	El Gamal
高斯	Gauss
哥德尔	Gödel
杰弗逊	Jefferson
卡丹	Cardanao
开普勒	Kepler
康托	Cantor
柯西	Cauchy
拉东	Radon

拉格朗日	Lagrange
莱布尼茨	Leibniz
罗素	Russell
马尔可夫	Markov
莫比乌斯	Möbius
牛顿	Newton
欧几里得	Euclid
欧拉	Euler
庞加莱	Poincaré
申农	C. E. Shannon
威尔逊	Wilson